# การสร้างไจโรสโคปอย่างง่าย

## How to make a Simple Gyroscope

ปรเมษฐ์ ปัญญาแหลก *


## บทคัดย่อ

การสร้างไจโรสโคปอย่างง่ายโดยใช้ล้อรถจักรยานเป็นองค์ประกอบสำคัญทำให้ได้ชุดทดลอง-สาธิตการเคลื่อนที่แบบหมุนได้ทั้งกรณีจลนศาสตร์และพลศาสตร์ในวิชาฟิสิกส์ สำหรับกรณีจลนศาสตร์ ใช้แสดงความสัมพันธ์ของความเร็วเชิงเส้นกับความเร็วเชิงมุม ซึ่งทดลองให้ดูได้โดยการสังเกตการเคลื่อนที่ของจุดที่ตำแหน่งใกล้ขอบล้อกับจุดที่อยู่ใกล้แกนหมุน รวมทั้งสามารถแสดงความสัมพันธ์ในรูปของเวกเตอร์ได้ด้วยแบบจำลองลูกศรแทนเวกเตอร์ ส่วนกรณีพลศาสตร์การหมุน ไจโรสโคปแบบล้อจักรยานที่สร้างขึ้นสามารถสาธิตการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุมและการเคลื่อนที่แบบหมุนควง ซึ่งเกี่ยวข้องกับทอร์กและโมเมนตัมเชิงมุมได้เป็นอย่างดี

## Abstract

The simple Bicycle Wheel Gyroscope is constructed for Physics class to demostrate Kinematics and Dynamics Rotational Motion. This equiptment is provided the students to understand rotational kinematics with visual demonstration of angular velocity and angular acceleration. To understand some situations in rotational dynamics, the Bicycle Wheel Gyroscope can be used to demonstrate conservation of angular momentum as well as the precessional motion due to torque and angular momentum relations.


## 1. บทนำ

การเคลื่อนที่แบบหมุนเป็นหัวข้อหนึ่งในวิชาฟิสิกส์ที่ผู้เรียนเข้าใจได้ยากถ้าไม่มีอุปกรณ์สาธิตประกอบการบรรยาย โดยเฉพาะอย่างยิ่งคำนิยามใหม่ ๆ ที่เกี่ยวกับกลศาสตร์การหมุนซึ่งผู้เรียนยังไม่คุ้นเคยมาก่อน เช่น ความเร็วเชิงมุม ความเร่งเชิงมุม โมเมนต์ความเฉื่อย และโมเมนตัมเชิงมุม เหล่านี้เป็นต้น ยิ่งการสอนเรื่องการหมุนควง (precessional motion ) ที่โยงถึงปริมาณสัมพันธ์ของทอร์กกับการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเชิงมุม ถ้าขาดอุปกรณ์ช่วยสอนเพื่อสาธิตให้เห็นจริงแล้ว การสอนในหัวข้อดังกล่าวจะสูญเวลาเปล่าอย่างน่าเสียดาย

ในบทความนี้ ผู้เขียนอธิบายการสร้างไจโรสโคปแบบล้อจักรยานที่ใช้ช่วยสอนวิชาฟิสิกส์ กรณีการเคลื่อนที่แบบหมุน โดยใช้อุปกรณ์น้อยชิ้นแต่สามารถสาธิตครอบคลุมเนื้อหาส่วนใหญ่ได้ มีความคงทน ราคาถูก และที่สำคัญคือออกแบบให้ใช้งานได้เอนกประสงค์

* ผู้ช่วยศาสตราจารย์ประจำหมวดวิชาวิทยาศาสตร์ประยุกต์ ศูนย์วิชาการศึกษาทั่วไป มหาวิทยาลัยศรีปทุม

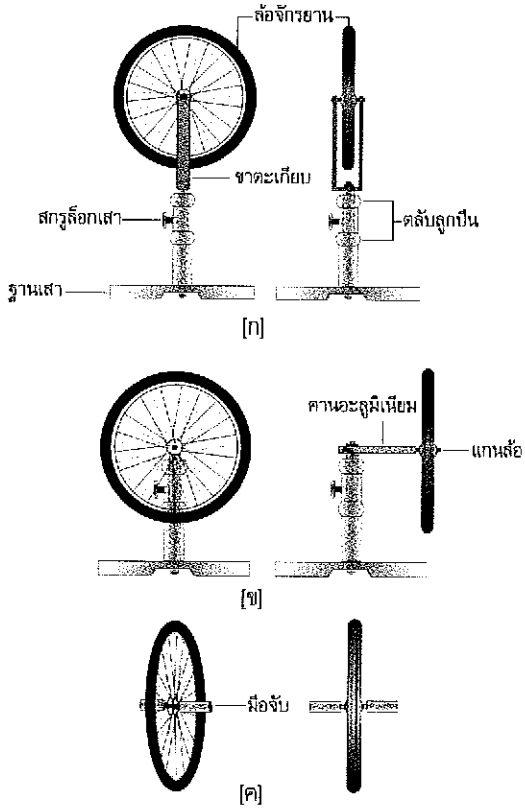
เช่น การสร้างไจโรสโคปแบบล้อจักรยานชุดหนึ่งสามารถใช้สาธิตเรื่องการเคลื่อนที่แบบหมุนทั้งจลนศาสตร์และพลศาสตร์ได้ในคราวเดียวกัน นอกจากแสดงแผนภาพวิธีสร้างอุปกรณ์แล้ว ยังได้อธิบายวิธีใช้งานประกอบการสอนหัวข้อสำคัญ ๆ ที่เกี่ยวกับกลศาสตร์การหมุนโดยสังเขป ตลอดจนข้อแนะนำเพิ่มเติมอื่น ๆ ซึ่งจะช่วยให้ผู้อ่านที่เป็นอาจารย์สอนวิชาฟิสิกส์พื้นฐานหรือผู้เกี่ยวข้องสามารถนำไปปรับใช้ หรือเกิดความคิดสร้างสรรค์ที่ช่วยเสริมให้การเรียนวิชาสอนฟิสิกส์ไม่น่าเบื่อ

## 2. การสร้างไจโรสโคปแบบล้อจักรยานและอุปกรณ์เสริม

ล้อจักรยานเป็นล้อหมุนที่มีความคงทน ทำให้หมุนด้วยอัตราเร่งหรืออัตราเร็วคงที่ได้ดีและหาง่าย ล้อจักรยานที่นำมาสร้างเป็นไจโรสโคปควรเลือกเอาล้อหน้าเพราะดุมของล้อมีส่วนประกอบสมดุลทั้งสองข้าง ไจโรสโคปที่สร้างขึ้นนี้จะสามารถทำหน้าที่ได้หลากหลายเพียงใดขึ้นกับการติดล้อจักรยานกับเสายึด เช่น เสายึดแบบติดตายและเสายึดที่หมุนได้อย่างอิสระ หรือใช้มือจับโดยไม่ใช้เสายึด ซึ่งการหมุนของล้อจักรยานบนเสายึดแต่ละแบบจะให้ข้ออธิบายกลศาสตร์การหมุนได้ตามความต้องการ

**2.1. ล้อจักรยาน** ควรใช้ล้อหน้าขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 45 cm (ล้อจักรยานเด็กขนาดกลางที่สูบลมยางให้เต็ม) ที่หมุนรอบแกนได้คล่อง ถ้าใช้ล้อเก่าที่หมุนค่อนข้างฝืดต้องทำความสะอาดและหยอดสารหล่อลื่น (Bicycle Wheel Gyrosope : ME-6833 ซึ่งผลิตโดยบริษัท Pasco ใช้ล้อจักรยานขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 60 cm ใช้ตลับลูกปืน precision ball bearing ที่มีความเสียดทานต่ำ ผลิตภัณฑ์ดังกล่าวมีเฉพาะล้อกับมือจับที่แกนล้อเท่านั้น[3]

**2.2 เสาตั้งเอนกประสงค์** ออกแบบให้เป็นเสาตั้งทั้งแบบนิ่งและแบบหมุนได้โดยใช้ฐานเสาเดียวกัน ดังแผนภาพในรูป 1 ส่วนของเสาที่โยงกับล้อแยกจากส่วนล่างด้วยตลับลูกปืนสองชุด สำหรับฐานเสาดังกล่าวอาจดัดแปลงมาจากขาเก้าอี้หมุนที่ถอดลูกล้อออก หรือทำเป็นแคล้มป์ยึดติดกับขอบโต๊ะได้ มีความสูงจากฐานถึงบ่ารับของแกนหมุน (รูป 1 ข) ประมาณ 40 cm




*รูป 1 แสดงส่วนประกอบของไจโรสโคปแบบล้อจักรยาน ซึ่งใช้เป็นอุปกรณ์ประกอบการสอนการเคลื่อนที่แบบหมุนในวิชาฟิสิกส์*

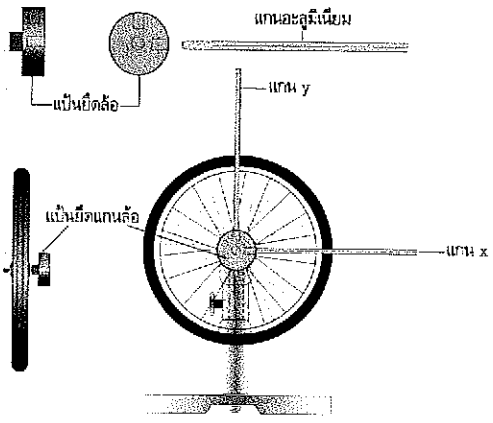
### 2.3 อุปกรณ์เสริม

(ก) เส้นแกนพิกัดฉาก xyz เป็นอะลูมิเนียมเส้นผ่าศูนย์กลาง 4 mm ยาว 50 cm จำนวน 3 แท่ง ปลายด้านหนึ่งของแต่ละแท่งมีเกลียวสำหรับขันเข้ากับ

แป้นรับในแนวตั้งฉาก ตรงกลางอีกด้านหนึ่งของแป้นรับมีรูเกลียวสำหรับยึดติดกับแกนล้อ (รูป 2) เพื่อให้ได้แกนอ้างอิง ซึ่งแสดงระนาบการหมุนของล้อและตำแหน่งของจุดสังเกตบนล้อที่เคลื่อนที่สัมพัทธ์กับแกนอ้างอิง (รูป 3)

(ข) แบบจำลองเวกเตอร์ เป็นแท่งอะลูมิเนียมขนาดเดียวกันกับเส้นแกนพิกัด แต่ยาวเส้นละประมาณ 30 cm จำนวน 3 แท่ง ปลายด้านหนึ่งของแต่ละแท่งติดแผ่นอะลูมิเนียมซึ่งตัดเป็นหัวลูกศร อีกปลายหนึ่งเป็นเกลียวสำหรับขันเข้ากับแป้นยึดได้เช่นเดียวกับเส้นแกนพิกัด แบบจำลองเวกเตอร์นี้ใช้สำหรับสาธิตความสัมพันธ์ของปริมาณต่าง ๆ เช่น ความเร็วเชิงเส้น กับความเร็วเชิงมุม หรือทอร์กกับโมเมนตัมเชิงมุม เหล่านี้เป็นต้น

(ค) มือจับ (ดัดแปลงมาจากที่พักเท้าสำหรับคนซ้อนท้ายจักรยาน) ซึ่งมีรูเกลียวสำหรับขันติดกับแกนหมุนของจักรยาน (รูป 1 ค) มือจับดังกล่าวช่วยให้จับแกนของล้อได้สะดวกในการสาธิต การอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุม และใช้เป็นข้อต่อยึดล้อจักรยานเข้ากับเสา ในกรณีการสาธิตการหมุนของล้อในแนวราบ




*รูป 2 แสดงอุปกรณ์เสริมที่ประกอบด้วยแป้นยึดแกนล้อและแกนพิกัดฉากสำหรับสาธิตการหมุนในสองมิติหรือแสดงความสัมพันธ์ของเวกเตอร์สามมิติ*

(ง) เสาตะเกียบ ทำด้วยอะลูมิเนียมสำหรับรองรับแกนล้อทั้งสองข้างเมื่อต้องการให้ล้อมีระนาบการหมุนตามแนวดิ่ง เพื่อให้ได้ไจโรสโคปที่มีจุดศูนย์ถ่วงของล้อผ่านเสาพอดี (รูป 1 ก)

(จ) คานเบา ทำด้วยแท่งอะลูมิเนียมแบบกลมหรือทรงสี่เหลี่ยมก็ได้ขนาดโตพอประมาณ ให้รับน้ำหนักของล้อได้ความยาวไม่เกิน 30 cm ปลายด้านหนึ่งมีรูเกลียวสำหรับสวมแกนล้อ ส่วนอีกปลายหนึ่งมีรูสำหรับล็อกกับเสาหมุน ทำให้ได้ไจโรสโคปอย่างง่าย อีกลักษณะหนึ่งที่จุดศูนย์ถ่วงของล้อไม่ผ่านเสา(รูป 1 ข)

## 3. การใช้งานไจโรสโคป แบบล้อจักรยานประกอบการสอน

**3.1 จลนศาสตร์การหมุน** (Rotational Kinematics) ใช้ล้อหมุนบนเสานิ่ง (ขันสกรูล็อกเสาไม่ให้เสาหมุนได้) โดยให้ระนาบล้ออยู่ในแนวดิ่ง (รูป 1 ข) ให้ผู้เรียนสังเกตการหมุนของจุดสามจุดที่ทำด้วยเทปกาวสีแดงหรือสีอื่นที่เห็นชัดตัดเป็นแผ่นวงกลมขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 1 cm แผ่นหนึ่งติดซิดขอบล้อ อีกแผ่นหนึ่งติดห่างแกนหมุนของล้อประมาณ 10 cm หรือใกล้กว่านั้นในแนวรัศมีเดียวกัน ส่วนแผ่นที่เหลือให้ติดที่บริเวณกึ่งกลางล้อ บนซี่ล้อในแนวรัศมีอื่นที่ไม่ตรงกันกับสองจุดแรก เริ่มหมุนล้ออย่างช้า ๆ ให้เห็นจุดสังเกตสองจุดเคลื่อนที่ไปพร้อม ๆ กันได้อย่าง ชัดเจนเพื่อแสดงว่าในช่วงเวลาการหมุนหนึ่ง ๆ จุดทุกจุดบนล้อหมุนย่อมเปลี่ยนตำแหน่งเป็นมุมนับจากตำแหน่งตั้งต้นได้เท่ากันเสมอ หลังจากนั้นทำให้ล้อหมุนเร็วขึ้น และให้ผู้เรียนดูการเคลื่อนที่ของจุดทั้งสาม สังเกตว่าจุดใดที่แลเห็นการหมุนได้ชัดที่สุด จุดใดที่มองเห็นไม่ชัด หรือไม่เห็นเลย เพราะเหตุใด การอธิบายจลนศาสตร์การหมุนประกอบการสาธิตด้วยล้อหมุนในลำดับต่อไปจะช่วยให้ผู้เรียนเข้าใจสิ่งที่ปรากฏจากการสังเกตดังกล่าวได้ง่ายขึ้น

การอธิบายจลนศาสตร์ การหมุนเริ่มจากนิยามเบื้องต้นของปริมาณต่าง ๆ ที่สำคัญ ๆ อาทิ ความเร็วเชิงมุมและความเร่งเชิงมุม จากนั้น แสดงสมการจลนศาสตร์การหมุนโดยเปรียบเทียบกับจลนศาสตร์การเคลื่อนที่เชิงเส้นของอนุภาค แล้วจบด้วยปริมาณสัมพันธ์ของความเร็วเชิงมุมกับความเร็วเชิงเส้น ซึ่งเป็นประเด็นตอบปัญหาให้ผู้เรียนทราบเหตุผลว่าเพราะเหตุใดจุดที่ใกล้แกนหมุนของล้อจึงแลเห็นได้ชัดที่สุดขณะล้อหมุนเร็ว ในขณะที่จุดใกล้ขอบล้อหายไปจากสายตา

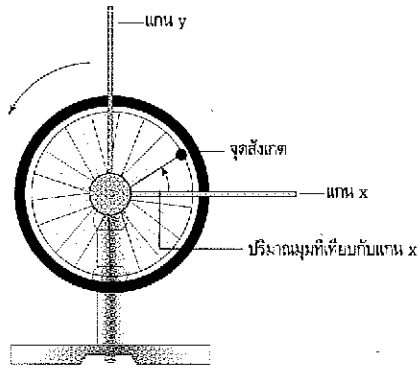
*นิยามของความเร็วเชิงมุม* ติดตั้งแกนอ้างอิง xy (อุปกรณ์เสริม) เข้ากับแกนหมุนของล้อ ติดแผ่นจุดสังเกตจุดหนึ่งเข้ากับซี่ล้อให้ใกล้ขอบล้อพอสมควรดังรูป 3 เมื่อให้ตำแหน่งของจุดที่เวลา $t_1$ เป็นมุม $\theta_1$ เทียบกับแกน x และที่เวลา $t_2$ มุมเป็น $\theta_2$ เทียบกับแกนเดียวกัน นั่นคือในช่วงเวลา $\Delta t = t_2 - t_1$ ได้การกระจัดเชิงมุม $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ จึงให้คำจำกัดความของความเร็วเชิงมุมเฉลี่ย (average angular velocity) [6] $\omega_{av}$ ดังนี้

$$\omega_{av} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

ส่วนความเร็วเชิงมุมขณะหนึ่ง(instantaneous angular velocity) $\omega$ เป็นลิมิตของ $\omega_{av}$ เมื่อ $\Delta t$ ย่างเข้า สู่ศูนย์ หรืออนุพันธ์ของ $\theta$ เทียบกับ $t$

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

เนื่องจากจุดทุกจุดบนล้อหมุน (และวัตถุแข็งเกร็งทั่วไปที่หมุนรอบแกน) มีการกระจัดเชิงมุมเท่ากันจุดต่าง ๆ เหล่านั้น จึงย่อมมีความเร็วเชิงมุมเท่ากันเสมอ โดยทั่วไปกำหนดให้ความเร็วเชิงมุมมีเครื่องหมายเป็นบวก เมื่อ




***รูป 3*** *ไจโรสโคปแบบล้อจักรยานแสดงการหมุนในระบบ xy ซึ่งใช้ประกอบการอธิบายนิยามของการกระจัดเชิงมุม*

หมุนในทิศทางที่มุม $\theta$ เพิ่มขึ้น (ทวนเข็มนาฬิกา) และเป็นลบเมื่อหมุนในทิศที่ทำให้มุม $\theta$ ลดลง (หมุนตามเข็มนาฬิกา)[6] ในระบบหน่วยเอสไอ วัดมุมเป็นเรเดียนและเวลาเป็นวินาทีความเร็วเชิงมุมจึงมีหน่วยเป็นเรเดียนต่อวินาที (rad/s)

*ความเร่งเชิงมุม* สาธิตได้โดยให้หมุนล้อจากสภาพนิ่งให้ทวีความเร็วเชิงมุมขึ้นเป็นลำดับ หรือในทางกลับกันทำให้ล้อซึ่งหมุนด้วยความเร็วเชิงมุมมากให้ชะลอช้าลงตามลำดับการหมุนซึ่งความเร็วเชิงมุมเปลี่ยนแปลงเช่นนี้เรียกว่าการหมุนมีความเร่งเชิงมุม (angular acceleration) ให้คำจำกัดความได้ทำนองเดียวกันกับความเร็วเชิงมุม กล่าวคือ ถ้าให้ $\omega_1$ เป็นความเร็วเชิงมุมที่เวลา $t_1$ และ $\omega_2$ เป็นความเร็วเชิงมุมที่เวลา $t_2$ จะได้ ความเร่งเชิงมุมเฉลี่ย (average angular acceleration) $\alpha_{av}$ ในช่วงเวลา $\Delta t = t_2 - t_1$ ดังนี้

$$\alpha_{av} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

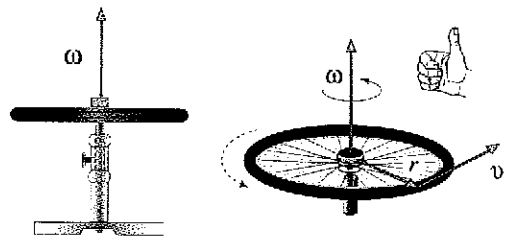
ส่วนความเร่งเชิงมุมขณะหนึ่ง (instantaneous angular acceleration) $\alpha$ เป็นลิมิตของ $\alpha_{av}$ เมื่อ $\Delta t$ ย่าง

เข้าสู่ศูนย์

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

ความเร่งเชิงมุมจึงมีหน่วยเป็น $rad/s^2$ ส่วนเครื่องหมายของความเร่งเชิงมุมอาจพิจารณาได้จากการหมุน กล่าวคือถ้าล้อหมุนมีความเร็วเชิงมุมเพิ่มขึ้น เครื่องหมายของ $\alpha$ เป็นบวก แต่ถ้าความเร็วเชิงมุมลดลง เครื่องหมายของ $\alpha$ เป็นลบ หรืออีกนัยหนึ่งคือ ล้อหมุนได้เร็วขึ้นเป็นลำดับเมื่อ $\alpha$ กับ $\omega$ มีเครื่องหมายเหมือนกันและล้อจะหมุนช้าลงเป็นลำดับเมื่อ $\alpha$ กับ $\omega$ มีเครื่องหมายต่างกัน

*ความสัมพันธ์ของความเร็วเชิงเส้นกับความเร็วเชิงมุม* ของการหมุนรอบแกนตรึง (fixed axis) เป็นอีกประเด็นหนึ่งที่มีความสำคัญและสาธิตให้เข้าใจได้ง่ายด้วยอุปกรณ์ล้อหมุนที่ประดิษฐ์ขึ้น ก่อนอื่นให้อธิบายทิศของเวกเตอร์ความเร็วเชิงมุมที่มีความสัมพันธ์กับการหมุนตามกฎมือขวาดังรูป 4 กล่าวคือ ถ้ากำมือขวาให้นิ้วทั้งสี่วนไปตามแนวทิศการหมุนของล้อ หัวแม่มือจะชี้ทิศของความเร็วเชิงมุมเสมอ นั่นคือ เวกเตอร์ $\omega$ มีทิศตั้งฉากกับระนาบการหมุนของล้อ (การสาธิตขั้นตอนนี้ให้จัดระนาบล้อวางตัวตามแนวนอน เพื่อติดลูกศรแสดงเวกเตอร์ $\omega$ เข้ากับแกนดุมล้อจักรยานให้เวกเตอร์ดังกล่าวอยู่ในแนวตั้งซึ่งมองเห็นถนัดที่สุด) ในขณะที่ระนาบล้ออยู่ในแนวราบ ให้แสดงว่าในขณะที่วัตถุหมุนรอบแกน นอกจากจะมีความเร็วเชิงมุมแล้ว ทุก ๆ อนุภาคที่ประกอบกันเป็นวัตถุที่ดังกล่าวยังมีความเร็วเชิงเส้น วิธีสาธิตกระทำโดยให้ล้อหมุนเร็วพอประมาณ แล้ววางแผ่นวัตถุชิ้นเล็ก ๆ เช่น "ตลับยาหม่อง" ลงบนส่วนของขอบยางล้อ จะเห็นว่าในทันทีที่แผ่นวัสดุดังกล่าวสัมผัสล้อ มันจะกระเด็นออกไปในแนวเส้นสัมผัสกับขอบล้อ ซึ่งแสดงว่าหากส่วนใดส่วนหนึ่งที่ประกอบเป็นล้อหมุน




*รูป 4 ใช้ใจโรสโคปแบบล้อจักรยานแสดงการหมุนในแนวราบ (ระนาบ xz) เพื่ออธิบายความสัมพันธ์เชิงเวกเตอร์ของความเร็วเชิงเส้นกับความเร็วเชิงมุมของการหมุน*

ไม่ยึดแน่นกัน ส่วนประกอบนั้น ๆ จะถูกเหวี่ยงออกไปในทิศทางเส้นสัมผัสกับแนววงกลมซึ่งมีรัศมีเท่ากับระยะที่ส่วนประกอบนั้นอยู่ห่างจากแกนหมุน เมื่อแสดงให้เห็นว่าการหมุนมีทั้งความเร็วเชิงมุมและความเร็วเชิงเส้นแล้ว ให้สาธิตความสัมพันธ์ของความเร็วเชิงเส้นกับความเร็วเชิงมุม โดยใช้แกนหัวลูกศรแทนเวกเตอร์หัวลูกศรอันหนึ่งติดกับแกนหมุนของล้อแทนความเร็วเชิงมุม และอีกอันหนึ่งติดเข้ากับขอบล้อ (โดยทำปลอกสวมยึดกับขอบล้อได้พอดี) และใช้อีกลูกศรหนึ่งแทนเวกเตอร์ตำแหน่ง $r$ ของอนุภาคที่มีความเร็วเชิงเส้น $\upsilon$ ก็จะเห็นเวกเตอร์ทั้งสาม มีทิศตั้งฉากซึ่งกันและกันดังรูป 4 ดังนั้น ความสัมพันธ์เชิงเวกเตอร์ที่เป็นไปได้ในกรณีนี้คือ $\upsilon = \omega \times r$ จากความสัมพันธ์เชิงเวกเตอร์ดังกล่าวจะได้ขนาดความเร็วเชิงเส้นเป็น $\upsilon = \omega r$ นั่นคือ เมื่อทุก ๆ อนุภาคใน ล้อหมุนมี $\omega$ เท่ากัน ขนาดความเร็ว $\upsilon$ จึงขึ้นกับรัศมี $r$ ความสัมพันธ์นี้ให้ความกระจ่างต่อปริศนาจากข้อสังเกตของการเคลื่อนที่ของจุดสามจุดบนล้อหมุนที่ได้สาธิตแล้ว โดยแสดงให้เห็นว่าจุดที่อยู่ใกล้ขอบล้อหรือห่างจากแกนหมุนมากที่สุด ย่อมมีขนาดความเร็วเชิงเส้นมากกว่าจุดที่อยู่ใกล้แกนหมุน ดังนั้นจึงมองไม่เห็นจุดที่อยู่ใกล้ขอบล้อ ขณะที่ล้อกำลังหมุนด้วยเร็วสูง แต่จะยังมองเห็นจุดที่อยู่ใกล้แกนหมุนเพราะจุด ๆ นี้มีขนาดความเร็วเชิงเส้นน้อย (ช้า) กว่า อย่างไรก็ตามกรณีความสัมพันธ์แบบเวกเตอร์นี้ อาจถูกถาม

ว่าทำไมไม่เขียนเป็น $\omega = r \times v$ ซึ่งจะได้ขนาด $\omega = rv$ คำถามนี้ต้องการคำอธิบาย หากดูเพียงความสัมพันธ์ตามสมบัติการคูณแบบไขว้ของเวกเตอร์แล้วอาจไม่เห็นสิ่งผิดปกติ แต่โดยธรรมชาติการหมุนรอบแกนตรึงของวัตถุไม่ยอมให้เกิดความสัมพันธ์แบบดังกล่าว เพื่อความเข้าใจประเด็นนี้ เราจะสมมติให้อนุภาค ๆ หนึ่ง เคลื่อนที่ได้ส่วนโค้ง $s$ และได้มุมรองรับส่วนโค้งที่จุดศูนย์กลางความโค้งเป็นตามคำจำกัดความของมุม $\theta$ ที่เป็นเรเดียนจะได้ $\theta = s/r$ หรือซึ่งจะได้อนุพันธ์ของ $s$ เทียบกับเวลา $t$ เป็น

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt} r$$

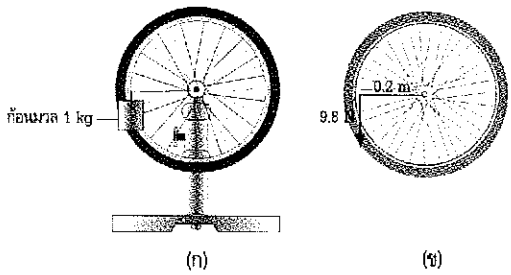
เนื่องจาก $ds/dt = v$ และ $d\theta/dt = \omega$ ดังนั้น $v = \omega r$ ความสัมพันธ์ที่แท้จริงของความเร็วเชิงเส้นกับความเร็วเชิงมุมจึงเป็น $v = \omega \times r$ ไม่ใช้ $\omega = r \times v$

*3.2 พลศาสตร์การหมุนของวัตถุแข็งเกร็ง* ไจโรสโคปที่สร้างขึ้นนี้อาจใช้สาธิตพลศาสตร์การหมุนได้หลายกรณี โดยเฉพาะปริมาณสัมพันธ์ที่มีความคล้ายคลึงกันกับกรณีพลศาสตร์ของอนุภาคที่เคลื่อนที่เชิงเส้น ตัวอย่างเช่น แรงเป็นสาเหตุให้อนุภาคเคลื่อนที่ด้วยความเร่งเชิงเส้น (ตามกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองนิวตัน) แต่ทอร์กเป็นเหตุให้วัตถุหมุนด้วยความเร่งเชิงมุม หรือโมเมนตัมเชิงเส้นเป็นผลคูณของมวลกับความเร็วเชิงเส้น การหมุนของวัตถุก็มีโมเมนตัมเชิงมุมซึ่งเป็นผลคูณของโมเมนต์ความเฉื่อยกับความเร็วเชิงมุม เหล่านี้เป็นต้น การให้ผู้เรียนรู้จักเปรียบเทียบกับสิ่งที่ได้เรียนรู้มาก่อนเป็นอีกวิธีหนึ่งที่ช่วยให้เข้าใจนิยามใหม่ ๆ ได้ง่ายขึ้น ก่อนที่จะแสดงที่มาของนิยามเหล่านั้นด้วยวิธีการทางคณิตศาสตร์ ตามความจำเป็นในภายหลัง

*โมเมนต์ความเฉื่อยคืออะไร* ถ้าล้อมีลักษณะสมมาตร การหมุนล้อรอบแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางย่อมทำได้ง่ายกว่าการหมุนรอบแกนที่ไม่ผ่านจุดศูนย์กลาง (สาธิตง่าย ๆ โดยใช้กระดาษแข็งเจาะเป็นรูหลายรู ทั้งรูที่ผ่านจุดศูนย์ กลาง และไม่ผ่านจุดศูนย์กลาง สอดแกนแล้ว หมุน) ปริมาณที่วัดความยากหรือง่ายของการหมุนรอบแกนใด ๆ ของวัตถุเรียกว่า *โมเมนต์ความเฉื่อย* (moment of inertia) หรือความเฉื่อยเชิงหมุน (rotational inertia)[1] ซึ่งมีหน่วยวัดตามระบบหน่วย *SI* เป็นกิโลกรัมตารางเมตร ($kg.m^2$) โดยทั่วไปนิยมให้ $I$ เป็นสัญลักษณ์ของปริมาณ ๆ นี้ ในกรณีของพลศาสตร์การเคลื่อนที่เชิงเส้นของวัตถุ มวลเฉื่อย (inertial mass ; $m$ ) ของวัตถุ เป็นปริมาณที่วัดความสามารถต้านการเปลี่ยนแปลงความเร็วเชิงเส้นของวัตถุ ซึ่งหมายความว่าวัตถุที่มีมวลมาก ทำให้ความเร็วเชิงเส้นเพิ่มหรือลดได้ยากกว่าวัตถุที่มีมวลน้อย โดยนัยเดียวกันนี้ โมเมนต์ความเฉื่อยย่อมเป็นปริมาณที่วัดความสามารถต่อต้านการเปลี่ยนแปลงความเร็วเชิงมุม นั่นคือ ถ้าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนใด ๆ แกนหนึ่งมีค่ามาก การเปลี่ยนแปลงความเร็วเชิงมุมให้เพิ่มหรือลดขณะกำลังหมุนรอบแกนนั้น ๆ จะกระทำได้ยากกว่าวัตถุที่หมุนรอบแกนเดียวกัน แต่มีโมเมนต์ความเฉื่อยน้อยกว่า ตัวอย่างเช่น ถ้าเรานำก้อนมวลมาผูกติดกับล้อที่ตำแหน่งต่าง ๆ เป็นระยะนับจากแกนหมุนไปตามแนวรัศมีความยากง่ายของการหมุนรอบแกนจะไม่เท่ากัน ซึ่งแสดงให้เห็นชัดว่าการเปลี่ยนมวลและตำแหน่งของก้อนมวลล้วนมีผลต่อค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนทั้งสิ้น

*วิธีวัดทอร์กที่ทำให้วัตถุหมุนรอบแกนด้วยความเร่งเชิงมุม* ทอร์ก (torque) หรือโมเมนต์ของแรง (สัญลักษณ์ $\tau$ ) เป็นปริมาณที่มักอ้างอิงเสมอในกลศาสตร์การหมุน การสาธิตเรื่องทอร์กทำได้โดยการเอาก้อนมวลที่ทราบขนาดมาผูกติดกับล้อ ตัวอย่างเช่น นำมวลขนาด 1 kg มาผูกกับล้อที่ตำแหน่งห่างจากแกนหมุน 20 cm แล้วจับให้มวลดังกล่าวอยู่ในแนวระนาบเดียวกันกับแกนล้อ

ดังรูป 5 ก ซึ่งเท่ากับว่าได้ใส่แรง 9.8 N (นิวตัน) ทิศลงล่าง (ดูแผนภาพแรงรูป 5 ข) กระทำ




*รูป 5 แสดงทอร์กกระทำต่อล้อจักรยานโดยใช้ก้อนมวลแขวนกับซี่ล้อจักรยานที่ตำแหน่งห่างจากจุดหมุนพอประมาณในแนวราบ ซึ่งจะได้ขนาดทอร์กเป็นผลคูณของน้ำหนักก้อนมวลกับระยะห่างดังกล่าวนั้น*

ต่อล้อที่ตำแหน่งห่างจากแกนหมุน 0.20 m หรือใส่ทอร์กขนาด $(9.8N)(0.20m) = 1.96\ N.m$ ให้แก่ล้อในทันทีที่ปล่อยมือล้อจะเริ่มหมุนด้วยความเร่งขณะหนึ่ง ในการสาธิตนี้ต้องการทบทวนให้ผู้เรียนทราบว่าขนาดของทอร์กเป็นผลคูณของขนาดแรง ($F$) กับระยะห่างนับจากแกนหมุน ไปยังแนวแรง ($d$) ซึ่งเขียนเป็นสมการ $\tau = Fd$ หากมีทอร์กกระทำต่อล้ออย่างต่อเนื่องล้อก็หมุนเร็วขึ้นตามลำดับ ส่วนทิศของเวกเตอร์ทอร์กสัมพันธ์กับทิศการ "พยายามหมุน" ของทอร์ก ซึ่งเป็นไปตามกฎมือขวาเช่นเดียวกันกับการกำหนดทิศของความเร็วเชิงมุม ดังนั้น ถ้าเวกเตอร์ทอร์กมีทิศเดียวกันกับความเร็วเชิงมุม (รูป 4) การหมุนจะเร็วขึ้นเป็นลำดับ (มีความเร่งเชิงมุมเป็นบวก) แต่ถ้าทอร์กกับความเร็วเชิงมุมมีทิศตรงข้าม ความเร็วของการหมุนจะลดลง (มีความเร่งเชิงมุมเป็นลบ) ด้วยเหตุที่ทอร์กทำให้การหมุนมีความเร่ง (เชิงมุม) จึงเขียนปริมาณสัมพันธ์ของทอร์ก ($\tau$) โมเมนต์ความเฉื่อย ($I$) และความเร่งเชิงมุม ($\alpha$) ได้เป็น $\tau = I\alpha$ ซึ่งตรงกันกับแรง $F$ ทำให้วัตถุมวล $m$ มีความเร่ง $a$ โดยเขียนเป็นสมการตามกฎข้อที่สองของนิวตันได้ว่า $F = ma$ สำหรับปริมาณอื่น ๆ เช่น โมเมนตัมเชิงมุม พลังงานจลน์และกำลัง (อัตราการทำงาน) ของการหมุนอาจสรุปร่วมกับปริมาณอื่น ๆ เทียบเคียงกับกรณีการเคลื่อนที่เชิงเส้นดังนี้

| การเคลื่อนที่เชิงเส้นของวัตถุมวล $m$ | การหมุนรอบแกนของวัตถุที่มีโมเมนต์ความเฉื่อย $I$ |
|---|---|
| 1. มวลเฉื่อย $m$ (ปริมาณที่วัดความสามารถต่อต้านการเปลี่ยนแปลงความเร็วเชิงเส้น | 1. โมเมนต์ความเฉื่อย $I$ (ปริมาณที่วัดความสามารถต่อต้านการเปลี่ยนแปลงความเร็วเชิงมุม) |
| 2. ความเร็วเชิงเส้น $\upsilon$ | 2. ความเร็วเชิงมุม $\omega$ |
| 3. แรงสุทธิ $F$ ที่ไม่เป็นศูนย์ทำให้วัตถุมวล $m$ เคลื่อนที่ด้วยความเร่งเชิงเส้น $a$ ตามแนวแรง โดย $F = ma$ | 3. ทอร์กสุทธิ $\tau$ ที่ไม่เป็นศูนย์ทำให้วัตถุที่มีโมเมนต์ความเฉื่อย $I$ หมุนรอบแกนด้วยความเร่งเชิงมุม $\alpha$ โดย $\tau = I\alpha$ |
| 4. โมเมนตัมเชิงเส้น $p = m\upsilon$ | 4. โมเมนตัมเชิงมุม $L = I\omega$ |
| 5. พลังงานจลน์ $K = \frac{1}{2}m\upsilon^2$ | 5. พลังงานจลน์ $K = \frac{1}{2}I\omega^2$ |
| 6. กำลัง $P = F\upsilon$ | 6. กำลัง $P = \tau\omega$ |

*การอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุม* ไจโรสโคปที่สร้างขึ้นนี้สามารถสาธิตการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุมได้โดยสะดวก เริ่มต้นให้สวมที่จับเข้ากับแกนดุมล้อ แล้วให้ผู้เรียนคนหนึ่งนั่งบนเก้าอี้ที่มีแกนหมุนได้รอบตัวถือไจโรสโคป (ล้อจักรยาน) ดังกล่าวไว้ ขณะที่เก้าอี้ยังอยู่นิ่งให้หมุนล้อจักรยานโดยจัดระนาบการหมุนอยู่ในแนวนอน กรณีนี้โมเมนตัมเชิงมุมของระบบจะมีเฉพาะโมเมนตัมของล้อจักรยานเท่านั้น ซึ่งถ้าล้อมีทิศการหมุนทวนเข็มนาฬิกา โมเมนตัมเชิงมุม $L$ มีทิศชี้ขึ้น หลังจากนั้นให้ผู้เรียนคนดังกล่าวพลิกล้อให้แกนกลับด้าน 180 องศา (คือ ถ้าเดิมมือซ้ายจับอยู่ด้านบน ให้พลิกแกนล้อกระทั่งมือจับข้างซ้ายมาอยู่ด้านล่าง) อย่างรวดเร็วเพื่อให้โมเมนตัมเชิงมุมของล้อชี้ทิศลงล่าง การพลิกแกนดังกล่าวจะทำให้ผู้ที่ถือล้อหมุนไปพร้อมกับเก้าอี้ เนื่องจากระบบ (ไจโรสโคป ผู้เรียน และเก้าอี้) มีการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุมตามสมการ

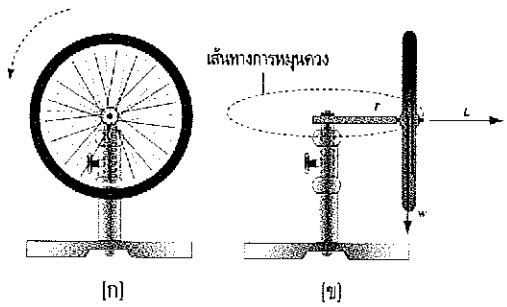
$$L_i = L_f = constant$$

หรือ

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f = constant \quad [4]$$

*ทอร์กมีผลต่อการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเชิงมุม* จากอัตราการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเชิงมุม $dL / dt = \tau$ จะเห็นว่าเมื่อทอร์กเป็นศูนย์หรือไม่มีทอร์กภายนอกมากระทำต่อระบบ โมเมนตัมเชิงมุม $L$ ของวัตถุย่อมมีค่าคงที่ ถ้าวัตถุดังกล่าว กำลังหมุนรอบแกนใดแกนหนึ่ง วัตถุก็จะหมุนรอบแกนนั้นด้วยความเร็วเชิงมุมคงที่ตลอดไป ข้อเท็จจริงในเรื่องนี้สามารถสาธิตได้ด้วยไจโรสโคปซึ่งติดตั้งบนเสาที่หมุนรอบได้คล่อง และให้จุดศูนย์ถ่วงของล้ออยู่แนวดิ่งตรงกับ "เสาหมุน" พอดีดังรูป 1 ก เมื่อให้ล้อจักรยานหมุนอย่างเร็วโดยมีแกนหมุนวางตามแนวนอนทิศใดทิศหนึ่ง เช่น เหนือ-ใต้ หลังจากหมุนแล้วความเร็วเชิงมุมของล้อจักรยานจะคงที่ (โดยประมาณ) และไม่มีทอร์กภายนอกมากระทำอีก จากนั้น ให้ยกไจโรสโคปเดินไปรอบ ๆ โดยระวังให้เสาตั้งตรงเสมอก็จะสังเกตเห็นแกนหมุนของล้อวางตัวตามแนวเดิม (เหนือ-ใต้) ซึ่งแสดงว่าโมเมนตัมเชิงมุมของล้อหมุนไม่เปลี่ยนแปลงทิศ

ในกรณีมีทอร์กที่ไม่เป็นศูนย์กระทำต่อล้อไจโรสโคป โมเมนตัมเชิงมุมย่อมเปลี่ยนแปลงตามสมการ $dL = \tau\, dt$ ซึ่งจะเห็นว่าการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเชิงมุมมีทิศเดียวกับทอร์กที่กระทำ จึงเป็นเหตุให้แกนหมุนของล้อเปลี่ยนทิศ ซึ่งเราเรียกปรากฏการณ์นี้ว่า *การหมุนควง* (precession) การสาธิตปรากฏการณ์นี้กระทำได้โดยอาศัยไจโรสโคปแบบล้อจักรยานที่สร้างขึ้น โดยติดตั้งล้อไว้กับปลายคานเบาซึ่งมีปลายคานด้านหนึ่งติดกับเสาหมุนดังรูป 6 จุดศูนย์ถ่วงของล้อจึงไม่ผ่านเสา จึงเขียนแผนภาพแรงได้ดังรูป 6 ข (ถือว่าคานยาว $r$ มีน้ำหนักเบามากเมื่อเทียบกับน้ำหนักของล้อ) ทอร์กที่กระทำต่อล้อจึงเป็นทอร์ก เนื่องจากน้ำหนักของล้อและ




***รูป 6*** *แสดงการเคลื่อนที่หมุนควงของไจโรสโคปแบบล้อจักรยาน ซึ่งเป็นผลจากมีทอร์กที่ไม่เป็นศูนย์กระทำต่อระบบหมุนดังกล่าว*

มีขนาดทอร์กเป็น $\tau = r\omega$ โดยทิศของทอร์กตั้งฉากกับแกนหมุนของล้อ เมื่อให้ล้อจักรยานหมุนอย่างเร็ว ทอร์กดังกล่าวจะเป็นเหตุให้โมเมนตัมเชิงมุมของล้อเปลี่ยนแปลง โดยทิศการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเชิงมุม

อยู่ในทิศเดียวกันกับทอร์ก ( $dL = \tau dt$ ) ดังนั้น ในขณะที่ล้อหมุนแกนของล้อก็จะหมุนวนไปรอบเสา การเข้าใจหลักการของไจโรสโคปจะทำให้ผู้เรียนสามารถเข้าใจหลักการทำงานของระบบนำร่องอัตโนมัติของเครื่องบินได้อย่างดี โดยระบบดังกล่าวประกอบด้วยไจโรสโคปสองชุด ชุดหนึ่งสำหรับรักษาทิศการเคลื่อนที่อีกชุดหนึ่งสำหรับรักษาสถานะการทรงตัวของเครื่องบินดังกล่าว [5] นอกจากนี้ยังช่วยให้เข้าใจธรรมชาติการหมุนรอบตัวเองของดวงดาว ตัวอย่างเช่น นักวิทยาศาสตร์อธิบายว่าโลกของเราหมุนรอบแกน (ผ่านขั้วโลก-ใต้) มีลักษณะการหมุนควงในอวกาศด้วยเช่นกัน โดยแกนของโลกจะค่อย ๆ เปลี่ยนทิศ ซึ่งคำนวณว่า 1 รอบการหมุนควงของแกนโลกเกิดขึ้นทุก ๆ 25,800 ปี [2]

## 4. บทสรุป

ไจโรสโคปที่ประดิษฐ์ขึ้นโดยใช้ล้อจักรยาน เป็นองค์ประกอบสำคัญนี้ ได้เน้นการออกแบบให้ใช้งานได้เอนกประสงค์ เพื่อใช้สาธิตประกอบการบรรยายให้ครอบคลุมเนื้อหามากที่สุด สามารถปรับรูปแบบตามต้องการได้ง่าย เช่น ติดตั้งล้อกับเสานิ่งหรือเสาหมุนติดมือจับเข้ากับแกนหมุนของล้อเพื่อใช้สาธิตการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุมบนเก้าอี้หมุน หรือติดล้อกับคานเบาแล้วนำปลายคานอีกข้างหนึ่งติดกับปลายเสาหมุน เพื่อใช้สาธิตการเคลื่อนที่แบบหมุนควงหรืออาจใช้ล้อเปล่า ๆ สาธิตการเคลื่อนที่แบบกลิ้ง (การหมุนรอบแกนซึ่งเคลื่อนที่) เพื่อแสดงว่าความเร็วเชิงเส้นที่จุดสูงสุดของล้อมีค่าเป็นสองเท่าของความเร็วของจุดศูนย์กลางมวล ของล้อได้เหตุที่เลือกเอาล้อจักรยานมาเป็นองค์ประกอบสำคัญของชุดสาธิตดังกล่าวเพราะล้อจักรยานมีความคงทนแข็งแรง มีน้ำหนักพอดีต่อการจับถือ หมุนรอบแกนได้ง่ายโดยมีโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนเพียงพอให้การหมุนรักษาสถานะความเร็วเชิงมุมใกล้ค่าคงที่ได้นานหาง่ายและราคาไม่แพง การนำล้อจักรยานมาเป็นอุปกรณ์การสอนวิชาฟิสิกส์ในหัวข้อการเคลื่อนที่แบบหมุนนี้ ผู้เขียนมีจุดประสงค์อธิบายการสร้างอุปกรณ์ซึ่งใช้งานได้ทั้งในห้องปฏิบัติการฟิสิกส์และในชั้นเรียน สามารถประกอบเป็นชุดทดลองได้ตามความต้องการ หรือถอดเป็นชิ้นส่วนเพื่อสะดวกต่อการเก็บหรือขนย้าย

แม้ว่าไจโรสโคปจะช่วยให้การบรรยายวิชาฟิสิกส์เรื่องการเคลื่อนที่แบบหมุนชัดเจนยิ่งขึ้น แต่ถ้าหวังผลเลิศกว่านี้ควรมีสื่ออื่น ๆ เข้ามาเสริมด้วย อาทิ แบบจำลองของวัตถุทรงเรขาคณิตที่มีโมเมนต์ความเฉื่อยขึ้นกับมวลและรูปร่างของวัตถุนั้น ๆ หรือใช้โปรแกรมสำเร็จรูปที่แสดงกลศาสตร์ การหมุนได้อย่างหลากหลาย เช่น Interactive Physics ที่สามารถจำลองเหตุการณ์เสมือนจริงได้วิชาฟิสิกส์ก็จะเป็นวิชาที่น่าสนใจและเรียนสนุกวิชาหนึ่ง ○

## เอกสารอ้างอิง


[1] Fishbane, Paul M and Others, **Physics For Scientists and Engineers,** Extended Version, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1993, p.268.

[2] Grolier Incorporated, **Encyclopedia Americana,** Vol. 9, USA. 2001, p.353.

[3] Pasco Scientific, **Better Ways to Teach Science,** product catalog, 2000, p.89.

[4] Serway, Raymond A. and Beichner, Rober J. **Physics For Scientists and Engineers : with Modern Physics,** 5th. ed. Philadelphia : Suanders, 2000, p.341.

[5] Websters Unified, **The Illustrated Encyclopedia of Invention, Growing up with Science,** Vol.2, Newyork, 1990, p.132

[6] Young, Hugh D. and Freeman Roger A., **University Physics with Modern Physics,** 10 th. ed. Canada : Addison-Wesly Longman,Inc., 2000, p. 269-271




## บทคัดย่อ

การจัด
และทำให้ความ
เกิดจากการผส
มุ่งหวัง ดังนั้นก
ที่ต้องการความ
เครื่องมือที่จำเ
ระบบบริหารค

## Abstract

Know
organization
vision of the
process, and
Managemen
the right kn
technology i
vital. Applyi
advantage.

* ผู้ช่วยศาสต