ทฤษฎีของแคลคูลัสที่ลำดับเป็นเศษส่วน (Fractional Calculus Theory)

สิปาง ดิเรกคุณากร
มหาวิทยาลัยศรีปทุม

บทนำ

แคลคูลัสแบบเศษส่วนเป็นวิธีการคำนวณอนุพันธ์และอินทิกรัลที่ลำดับสามารถเป็นเลขเศษส่วนหรือเลขเชิงซ้อน คณิตศาสตร์แขนงนี้มีมานานกว่า 300 ปีแล้ว แต่คณิตศาสตร์แขนงนี้เพิ่งจะเริ่มมีบทบาทในทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรม เมื่อไม่นานมานี้ โดยได้มีการนำไปการประยุกต์ใช้งานในหลาย ๆ ด้าน เช่น คุณสมบัติของของที่มีความหนืด และคลื่นสนามไฟฟ้า เศรษฐศาสตร์เชิงปริมาณ และระบบพลวัตรที่ไม่เป็นเชิงเส้นเพราะการคำนวณโดยทฤษฎีนี้สามารถอธิบายระบบได้ละเอียดมากกว่าการคำนวณที่ลำดับเป็นแบบเลขจำนวนเต็ม นิยามที่เกี่ยวข้องของแคลคูลัสแบบนี้มีหลายนิยามด้วยกัน เช่น นิยามของ รีมาน รีอูลวิลี่ (Riemann-Louville) นิยามของกุลวาดเล็ทนิคอฟ (Grunwald-Letnikov) นิยามของคาปูโต (Caputo) เป็นต้น คณิตศาสตร์ของแคลคูลัสจะแบ่งออกเป็นสองส่วน คือ ส่วนของอนุพันธ์ (Differential) และส่วนของอินทิกรัล (Integral)โดยที่ส่วนของอนุพันธ์จะเป็นการอธิบายอัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชั่นเมื่อลิมิตของค่าตัวแปรมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ ส่วนอินทิกรัลจะเป็นบทกลับของการหาอนุพันธ์โดยเป็นการหาค่าฟังก์ชั่นหลักจากค่าอนุพันธ์ซึ่งสามารถพิจารณาได้ในรูปของพื้นที่ใต้กราฟในการหาอนุพันธ์โดยทั่วไปลำดับจะเป็นเลขจำนวนเต็ม เช่น การหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของระยะทางต่อเวลาจะเป็นความเร็ว ซึ่งจะเป็นอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่งของฟังก์ชั่นระยะทาง และการหาอัตราการเปลี่ยนแปลงความเร็วต่อเวลาจะเป็นความเร่งซึ่งจะเป็นอนุพันธ์ลำดับที่สองของฟังก์ชั่นระยะทางต่อเวลาและเป็นอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่งของความเร็วต่อเวลา

การประยุกต์ใช้งาน

แคลคูลัสเป็นวิธีการคำนวณอัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชั่นที่แบ่งออกได้เป็นสองแบบคือการหาอนุพันธ์และการอินทิเกรท การหาอนุพันธ์เป็นการพิจารณาอัตราการเปลี่ยนแปลงที่พิจารณาจากส่วนเล็ก ๆ ส่วนการอินทิเกรทรวมส่วนเล็ก ๆ เข้าไว้ซึ่งเป็นส่วนกลับของการหาอนุพันธ์ แคลคูลัสมีบทบาทอย่างมากในการคำนวณทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรม โดยทั่วไปในการคำนวณที่ใช้แคลคูลัสจะใช้ลำดับของอนุพันธ์ที่มีค่าเป็นเลขจำนวนเต็ม เช่น อัตราการเปลี่ยนแปลงของระยะทางต่อเวลาจะเป็นความเร็วและเป็นอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่งของระยะทางเทียบกับเวลา และอัตราการเปลี่ยนแปลงความเร็วต่อเวลาก็จะเป็นความเร่งและเป็นอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่งของความเร็วเทียบกับเวลา และเป็นอนุพันธ์ลำดับที่สองของระยะทางเทียบกับเวลาด้วยเช่นกัน ในทางทฤษฎีแล้วการคำนวณสามารถพิจารณาได้ที่ลำดับของอนุพันธ์มีค่าเป็นเลขเศษส่วนหรือเป็นจำนวนจินตภาพ แนวคิดนี้มีมานานแล้วตั้งแต่เริ่มมีการพัฒนาคณิตศาสตร์ของแคลคูลัส แต่ไม่ได้มีการนำมาใช้กันแพร่หลาย วิธีการคำนวณแคลคูลัสโดยพิจารณาลำดับเป็นเศษส่วนนั้นเพิ่งจะเริ่มมีการสนใจนำมาใช้เมื่อไม่นานมานี้ สำหรับการนำมาประยุกต์ใช้ในการคำนวณเพราะการคำนวณนั้นสามารถให้รายละเอียดได้มากกว่าการคำนวณโดยอาศัยวิธีหาค่ากลาง (Interpolation) หรือวิธีการประมาณค่าแนวโน้ม (Extrapolation) หรือการประมาณค่า (approximation) หลักการทางคณิตศาสตร์หรือแคลคูลัสของลำดับที่เป็นเศษส่วนไม่ใช่เรื่องใหม่ แต่การประยุกต์ใช้งานกับทฤษฎีหรือทางฟิสิกส์และวิศวกรรมเริ่มมีการนำมาใช้เมื่อไม่นานมานี้ เช่น การประมวลผลสัญญาณ (Digital Signal Processing) หรือ ทรรศนศาสตร์ของแสง (Optics) ทฤษฎีระบบควบคุม (Control Theory) การประมวลสัญญาณ (Signal Processing) การอธิบายการแพร่โดยการซึมผ่าน (Diffusion) และคุณสมบัติความยืดหยุ่นและความหนืดของสาร (Viscoelastic) รวมทั้งการประยุกต์ใช้งานในอีกหลายสาขา แคลคูลัสแบบเศษส่วนสามารถนำมาใช้อธิบายระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้น (nonlinear system) เช่น การแกว่งของวงจรไฟฟ้า (oscillation) ได้ละเอียดที่ลำดับของอนุพันธ์มีค่าเป็นเศษส่วน การประยุกต์ใช้แคลคูลัสแบบเศษส่วนในการอธิบายระบบที่เป็นพลวัตร (dynamical system) จะสามารถอธิบายค่าต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับระบบได้ เช่น เสถียรภาพ (stability) การลู่เข้าหรือลู่ออกจากจุดที่คงที่ (convergence of fixed point) เส้นทางเดินหรือวงโคจรของระบบ (trajectory) ได้ละเอียดมากขึ้น พัฒนาการของคอมพิวเตอร์ทำให้สามารถประยุกต์วิธีการคำนวณทฤษฎีของแคลคูลัสที่ลำดับเป็นเศษส่วนได้โดยอาศัยการคำนวณเชิงตัวเลข (Numerical method) การคำนวณโดยอาศัยคอมพิวเตอร์สำหรับทฤษฎีแคลคูลัสที่ลำดับเป็นเศษส่วนนั้นผลลัพธ์หรือคำตอบที่ได้จากการคำนวณนั้นสามารถให้ข้อสรุปใหม่ ๆ สำหรับการนำไปประยุกต์ใช้งาน

ที่มาของทฤษฎี

ทฤษฎีแคลคูลัสที่ลำดับเป็นเศษส่วนนั้นเริ่มขึ้นมาในสมัยเดียวกันกับแคลคูลัสแบบดั้งเดิมที่ลำดับเป็นจำนวนเต็ม โดยเริ่มมาจากคำถามของนักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส โฮสปิตอล (L'Hospital) ถามถึงไลซ์นิซ (Leibniz) นักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมันว่าถ้าอนุพันธ์มีลำดับเป็นเศษส่วน เช่น 1/2 จะมีความหมายอย่างไร? ไลซ์นิซ ตอบว่า"ในการคำนวณจะเกิดข้อขัดแย้งซึ่งวันหนึ่งจะมีประโยชน์" นิยามที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ของแคลคูลัสที่ลำดับเป็นเศษส่วนนั้นมีหลายแบบและมีการพัฒนาเรื่อยมาตลอดระยะเวลากว่าสามร้อยปี
ในปี 1819 นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส ลาครองก์ (S.F. Lacroix)ได้เริ่มจากนิยามของอนุพันธ์ สำหรับเลขจำนวนเต็มและสามารถเขียนให้อยู่ในรูปทั่วไปได้ในเทอมของแฟคทอเรี่ยล (factorial) และฟังก์ชั่นแกมม่า (Gamma function)ในปี 1823 อาเบล (Niels Henrik Abel)ได้ประยุกต์ใช้แคลคูลัสที่ลำดับเป็นเศษส่วนกับการหาคำตอบของปัญหาการหารูปแบบของการเคลื่อนที่ของลูกปัดลงมาตามลวดที่ขึงในแนวตั้งโดยไม่มีความเสียดทานโดยปัญหาจะเกี่ยวข้องกับระยะเวลาสั้นที่สุดในการลื่นลงมาตามลวดซึ่งเป็นปัญหาในวิชาแคลคูลัสของการเปลี่ยนแปลง (Variation Calculus) นิยามแรกของ ลีอูวิลลี่ (Liouville)ได้เริ่มจากผลลัพธ์ของอนุพันธ์ที่เขียนให้อยู่ในเทอมทั่วไปสำหรับลำดับใด ๆ โดยฟังก์ชั่นที่พิจารณานั้นเขียนได้ในเทอมของผลรวมของอนุกรมซึ่งมีข้อจำกัดที่ลำดับของอนุพันธ์จะจำกัดอยู่เฉพาะกับอนุกรมที่มีการลู่เข้า ต่อมา อีริค รัซเวล เลอฟ (Eric Russel Love) ได้นิยามอินทิกรัลในรูปของลำดับที่เป็นจินตภาพ และสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของการหาอนุพันธ์และอินทริกรัลของลำดับใด ๆ เมื่อส่วนที่เป็นจำนวนจริงมีค่ามากกว่าศูนย์ ในกรณีที่ส่วนที่เป็นจำนวนจริงมีค่าเป็นศูนย์ ฟรานซิส เฮช นอทโอเวอร์ (Francis H. Northover) ได้อธิบายว่าจากนิยามของไลมาน ลีอูลวิลลี่ (Riemann-Liouville definition) สามารถเขียนได้ในเทอมของการแปลงฟูเรียร์ (Fourier transform) จากลำดับที่เป็นจิตภาพ

การคำนวณที่เกี่ยวข้อง

เมื่อไม่นานมานี้ได้มีการนำทฤษฎีนี้ไปประยุกต์ใช้กับงานวิจัยทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมและมีการจัดประชุมวิชาการรวมทั้งการเสนอบทความทางวิชาการที่เกี่ยวข้องกับวิธีการคำนวณโดยอาศัยแคลคูลัสแบบเศษส่วนเพิ่มขึ้น โดยใช้ประยุกต์ในการอธิบายหรือสร้างแบบจำลองของระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นซึ่งสามารถอธิบายได้ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ (Differential Equation) สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ที่อธิบายระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นนั้น ถ้าสมการไม่สามารถหาผลเฉลยโดยวิธีการวิเคราะห์ได้ เช่น การอินทิเกรทเพื่อหาผลลัพธ์โดยตรงก็สามารถหาผลเฉลยได้จากการคำนวณเชิงตัวเลข (Numerical method) ในการคำนวณโดยวิธีการเชิงตัวเลขสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ที่ลำดับเป็นเศษส่วนสามารถทำได้หลายวิธี โดยวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขที่นิยมใช้สำหรับการคำนวณที่ลำดับเป็นเศษส่วนนั้นนอกจากวิธีการคำนวณโดยอาศัยวิธีการวิเคราะห์และวิธีการเชิงตัวเลขแล้ว ก็สามารถอาศัยการแปลงลาปลาส (Laplace transform) ให้สมการที่อยู่ในโดเมนของเวลา มาอยู่ในรูปของโดเมนความถี่ ผลเฉลยของสมการอนุพันธ์ที่ลำดับเป็นเศษส่วนนั้นจะสามารถเขียนได้ในเทอมของฟังก์ชั่นทางคณิตศาสตร์ อย่างเช่น ฟังก์ชั่นแกมม่า (Gamma function) หรือฟังก์ชั่นมิทแทก เลฟเฟลอร์ (Mittag-Leffler function) ได้หรือไฮเปอร์จีโอเมตริกฟังก์ชั่น (Hypergeometric function) นอกจากนี้ก็ยังสามารถหาผลเฉลยหรือคำตอบของสมการได้จากวิธีการแยกออกเป็นส่วนย่อย ๆ อย่างเช่น วิธีอโดเมี่ยนดีคอมโพซิชั่น (Adomian Decomposition method) และวิธีการประมาณค่าโดยวิธีกาเลอร์กิน (Garlerkin approximation)

ตัวอย่างวิธีการคำนวณ

ก่อนที่จะอธิบายตัวอย่างการคำนวณแคลคูลัสที่ลำดับเป็นเศษส่วน นั้นมาพิจารณาฟังก์ชั่นหนึ่งซึ่งมีเกี่ยวข้องอย่างมากในนิยามของแคลคูลัสแบบเศษส่วน แกมม่าฟังก์ชั่น (Gamma function) เป็นฟังก์ชั่นที่ขยายนิยามมาจากค่าแฟคทอเรียล (factorial) ซึ่งเป็นค่าที่พบมากในเรื่องวิธีการนับและการเรียงสับเปลี่ยน เช่น จำนวนวิธีการเรียงสลับสิ่งของที่แตกต่างกัน 5 ชิ้นจะเท่ากับ 5!=120 วิธี ค่าแฟคทอเรียลจะมีการกำหนดขึ้นใช้อยู่เฉพาะค่าที่เป็นบวก แต่ฟังก์ชั่นแกมม่าจะเป็นส่วนขยายของค่าแฟคทอเรียล ฟังก์ชั่นนี้จะมีค่าอยู่ในช่วงที่เป็นบวกและลบและมีค่าเป็นอนันต์ที่จุด -2 และ -1 ดังแสดงในรูปที่ 1

นิยามของแกมม่าฟังก์ชั่น สามารถเขียนได้ในเทอมของอินทิกรัล ได้ดังนี้

$$\Gamma(z)=\int_{0}^{\infty}e^{-t}t^{z-1}dt \tag{1}$$

จากอินทิกรัลนี้จะได้ว่า $n!=\Gamma(n+1)$ ซึ่งสามารถนำไปใช้หาเทอมทั่วไปของสัมประสิทธิ์ของการกระจายแบบทวินาม (Binomial coefficient) ได้ดังนี้

$$\binom{n}{m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}=\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(n-m+1)} \tag{2}$$

ถ้าจำได้ถึงการกระจายเทอม $(x+y)^n$ ค่าสัมประสิทธ์นี้เป็นค่าคงที่หน้าตัวแปรของการกระจายแบบทวินาม กราฟของฟังก์ชั่นแกมม่าแสดงในรูปจะเห็นว่ามีค่าอยู่ทั้งในช่วงที่เป็นบวกและช่วงที่เป็นลบ คุณสมบัติของฟังก์ชั่นแกมม่าที่น่าสนใจคือถ้าอินทิเกรททีละส่วนสมการที่ (1) ตามนิยาม จะได้ว่า $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ ซึ่งจะได้ผลลัพธ์เป็นนิยามค่าแฟคทอเรียลดังนี้

$$\Gamma(2)=1\cdot\Gamma(1)=1=1!$$

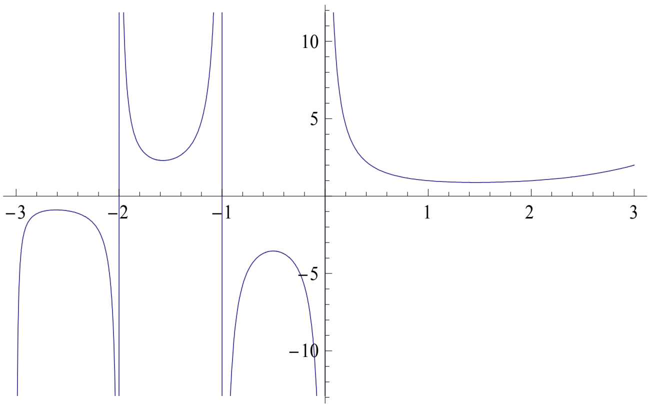
$$\Gamma(3)=2\cdot\Gamma(2)=2\cdot1=2!$$

$$\Gamma(4)=3\cdot\Gamma(3)=3\cdot2!=3!$$

$$\ldots$$

$$\Gamma(n+1)=n\cdot\Gamma(n)=n\cdot(n-1)!=n!$$

จากกราฟจะเห็นว่า $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ และ $\Gamma(-2)=\infty$



รูปที่ 1 แสดงฟังก์ชั่นแกมม่า (Gamma function)

สำหรับสัญลักษณ์ของอนุพันธ์ที่แสดงลำดับเป็นจำนวนเต็มที่ใช้ในการคำนวณในปัจจุบันนั้นกำหนดขึ้นโดยไลซ์นิซ สำหรับอนุพันธ์อันดับที่ 1 จะเขียนได้ดังนี้ $\frac{df(x)}{dx}$ อนุพันธ์อันดับที่ 2 จะเขียนได้ดังนี้ $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ และสำหรับอนุพันธ์ลำดับที่ n จะเขียนได้ดังนี้ $\frac{d^nf(x)}{dx^n}$ ซึ่งความหมายทางกายภาพของอนุพันธ์นั้นหมายถึงค่าความชันของกราฟและอัตราการเปลี่ยนแปลง

ในการคำนวณอนุพันธ์แบบเศษส่วนของฟังก์ชั่น $f(x)$ สามารถเขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ดังนี้ $D_x^{\alpha}f(x)$ เมื่อ α แทนเลขที่เป็นเศษส่วนหรือเลขเชิงซ้อน ซึ่งจะสอดคล้องกับสัญลักษณ์ที่กำหนดโดยไลซ์นิซ $\frac{d^nf(x)}{dx^n}$ เมื่อ n แทนด้วย α

สำหรับนิยามสำหรับแคลคูลัสที่ลำดับเป็นเศษส่วน และเหมาะกับการคำนวณทางตัวเลข (Numerical method) คือนิยามอนุพันธ์ของกุลวาด เล็ทนิคอฟ (Grunwald-Letnikov) โดยนิยามพิจารณาได้จากอนุพันธ์ลำดับที่ 1 ของฟังก์ชั่น $y = f(t)$ ดังนี้

$$f'(t) = \frac{df}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \tag{3}$$

โดยอาศัยนิยามนี้ จะได้อนุพันธ์สำหรับลำดับที่ 2 ของฟังก์ชั่นเป็น

$$f''(t) = \frac{d^2 f}{dt^2} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(t) - f'(t-h)}{h} \tag{4}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left\{ \frac{f(t) - f(t-h)}{h} - \frac{f(t-h) - f(t-2h)}{h} \right\} \tag{5}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left\{ \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h} \right\} \tag{6}$$

สำหรับอนุพันธ์ลำดับที่ n ของฟังก์ชั่นจะมีค่าเป็น

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n f}{dt^n} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} f(t - rh) \tag{7}$$

เมื่อ $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{r!}$

สำหรับ $\alpha \le n$ เราจะได้ $\lim_{h \to 0} f^{(\alpha)}(t) = f^{(\alpha)}(t) = \frac{d^\alpha f}{dt^\alpha}$ (8)

$${}_aD_x^\alpha f(x) = \lim_{h \to \infty} h^{-\alpha} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{\alpha}{r} f(x - rh), nh = x - a \tag{9}$$

เมื่อ h เป็นช่วงเล็ก ๆ ที่มีค่าเข้าใกล้ค่าอนันต์ (Infinity) และ α เป็นลำดับที่เป็นได้ทั้งจำนวนเต็มและเศษส่วน

เริ่มจากฟังก์ชั่น $f(x) = x^n$ เมื่อ n เป็นเลขจำนวนเต็มบวก เราจะได้ว่าสำหรับอนุพันธ์ลำดับที่ m โดยอุปนัยคณิตศาสตร์เราสามารถเขียนได้เป็น

$$\frac{d^m f}{dx^m} = \frac{n!}{(n-m)!} x^{n-m} \text{ เมื่อ } n \ge m \tag{10}$$

ซึ่งสามารถเขียนในเทอมของแกมม่าฟังก์ชั่นได้ดังนี้

$$\frac{d^n x^\mu}{dx^n} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-n+1)} x^{\mu-n} \tag{11}$$

เมื่อ $\Gamma(.)$ เป็นฟังก์ชั่นแกมม่าที่ใช้อธิบายเทอมแฟคทอเรียลในกรณีที่เป็นเลขที่ไม่เป็นจำนวนเต็มเมื่อ $n! = \Gamma(n+1)$

ตัวอย่างที่ 1 การหาอนุพันธ์แบบเศษส่วนของฟังก์ชั่น $f(x)=e^{ax}$ โดยใช้นิยามอนุพันธ์เศษส่วนกุลวาด-เล็ทนิคอฟ ในการคำนวณ

$$D^{\alpha}e^{ax}=\lim_{h\to 0}h^{-\alpha}\sum_{n=0}^{\alpha}(-1)^{n}\binom{\alpha}{n}e^{a(x+(\alpha-n)h)}$$

$$=e^{ax}\lim_{h\to 0}h^{-\alpha}\sum_{n=0}^{\alpha}(-1)^{n}\binom{\alpha}{n}(e^{ah})^{\alpha-n}$$

$$=e^{ax}\lim_{h\to 0}h^{-\alpha}(e^{ah}-1)^{\alpha}$$

$$=a^{\alpha}e^{ax}$$

ตัวอย่างที่ 2 การหาอนุพันธ์แบบเศษส่วนของฟังก์ชั่น $f(x)=x^{a}$ โดยใช้นิยามอนุพันธ์เศษส่วนกุลวาด-เล็ทนิคอฟ ในการคำนวณ

$D^{1}x^{a}=ax^{a-1}$ ซึ่งจะพบว่าสอดคล้องทฤษฎีบทของแคลคูลัสที่ลำดับเป็นจำนวนเต็ม

$D^{n}x^{a}=x^{a-n}\prod_{m=0}^{n-1}(a-m)=\dfrac{a!}{(a-n)!}x^{a-n}$ เมื่อ $\prod$ แทนผลคูณ

$D^{\alpha}x^{a}=\dfrac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-\alpha+1)}x^{a-\alpha}$ สำหรับ α ใด ๆ ที่ไม่เป็นจำนวนเต็มและ $0<\alpha<1$

ตัวอย่างที่ 3 อนุพันธ์แบบเศษส่วนของฟังก์ชั่น $f(x)=1$ เมื่อ $\alpha=1/2$

${}_{0}D_{x}^{1/2}(1)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi x}}$ จากคุณสมบัติของ $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$

ตัวอย่างที่ 4 อนุพันธ์แบบเศษส่วนของฟังก์ชั่น $f(x)=x$ เมื่อ $\alpha=1/2$

$$\frac{d^{1/2}y}{dx^{1/2}}=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} \tag{14}$$

ในทฤษฎีแคลคูลัสแบบดั้งเดิมนั้นจะเห็นว่าค่าอนุพันธ์ของค่าคงที่จะเป็นศูนย์แต่ในแคลคูลัสที่ลำดับเป็นเศษส่วนนั้นผลลัพธ์ดังในตัวอย่างที่ 3 ค่าอนุพันธ์ของ 1 ที่ลำดับ 1/2 จะมีค่าเป็น $\dfrac{1}{\sqrt{\pi x}}$

สรุป

แคลคูลัสแบบเศษส่วนเป็นวิธีการคำนวณอนุพันธ์และอินทิกรัลที่ลำดับสามารถเป็นเลขเศษส่วนหรือเลขเชิงซ้อน คณิตศาสตร์วิชานี้เริ่มขึ้นมาในสมัยเดียวกันกับแคลคูลัสแบบที่ลำดับเป็นจำนวนเต็ม แต่คณิตศาสตร์แขนงนี้เพิ่งจะเริ่มมีบทบาทในทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมเมื่อไม่นานมานี้จากการนำไปการประยุกต์ใช้งานในหลายสาขา นอกจากนิยามที่ยกมาแสดงในตัวอย่างข้างต้นก็ยังมีนิยามของนักคณิตศาสตร์อื่น ๆ อีกได้แก่นิยามแบบของรีมานต์ (Riemann) และนิยามของคาปูโต (Caputo) ที่ผู้สนใจสามารถหารายละเอียดเพิ่มเติมได้จากบรรณานุกรม การศึกษาวิธีการคำนวณโดยวิธีนี้สามารถนำมาประยุกต์ใช้งานได้ในอีกหลายสาขาและสามารถประยุกต์ใช้งานได้อีกหลายเรื่องในหลายสาขา

บรรณานุกรม

[1] Podlubny I. Fractional Differential equations, San Diego (CA): Academic Press; 1999

[2] Oldham K, Spainer J. Fractional calculus. New York: Academic press; 1974

[3] Bertram Ross, Bertram Ross, A Brief History and Exposition of the Fundamental Theory of Fractional Calculus, Fractional Calculus and Its Applications Proceeding of the International Conference Held at the University of New Haven, June 1974, Springer-Verlag, 1975