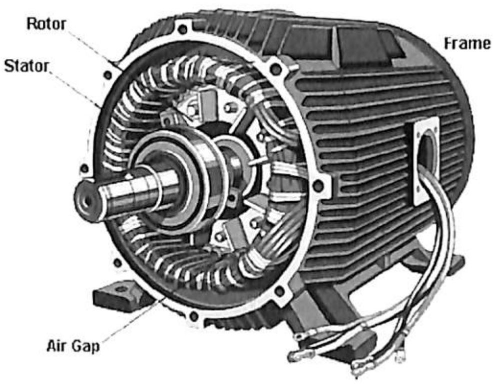
บทที่ 2
ทฤษฎีของมอเตอร์และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้จะเป็นการสืบค้นทฤษฎีและวิธีการที่เกี่ยวข้องในวิทยานิพนธ์นี้ประกอบด้วยเรื่องของมอเตอร์เหนี่ยวนำ 3 เฟสวิธีการหาประสิทธิภาพของมอเตอร์แบบดั้งเดิมวิธีการหาประสิทธิภาพของมอเตอร์แบบถดถอยและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 ลักษณะโครงสร้างของมอเตอร์เหนี่ยวนำ 3 เฟส

มอเตอร์เหนี่ยวนำประกอบด้วยส่วนสำคัญ 2 ส่วนคือ

1. สเตเตอร์ส่วนที่อยู่กับที่
2. โรเตอร์ส่วนที่หมุนได้



ภาพที่ 2.1 โครงสร้างมอเตอร์เหนี่ยวนำ 3 เฟส [12]

สเตเตอร์และโรเตอร์ทำด้วยแกนเหล็กแผ่นไฟฟ้าที่เคลือบผิวทั้ง 2 หน้าด้วยฉนวนเช่นเดียวกับแกนเหล็กหม้อแปลงแผ่นเหล็กแต่ละแผ่นนำไปปั๊มด้วยเครื่องปั๊มให้มีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางจำนวนสล๊อตภายในสำหรับสเตอร์และสล๊อตภายนอกสำหรับโรเตอร์ตามขนาดมาตรฐานที่ต้องการแล้วนำหลายๆๆแผ่นมาวางเรียงซ้อนกันอัดแน่นให้ได้ความลึกตามขนาดมาตรฐานของมอเตอร์นั้น ๆ

2.1.1 โรเตอร์ (Rotor)

โรเตอร์เป็นส่วนที่หมุนได้ของมอเตอร์ แบ่งออกเป็น 2 ชนิดคือ โรเตอร์แบบกรงกระรอก และโรเตอร์แบบเวานด์หรือโรเตอร์แบบสลิปริง

1.โรเตอร์แบบกรงกระรอก

ประกอบด้วยตัวนำทองแดงหรืออลูมิเนียมใส่ไว้ในสล๊อตภายนอกรอบ ๆ แกนโรเตอร์ แล้วปิดหัวท้ายต่อลัดวงจรตัวนำโรเตอร์ในลักษณะนี้ว่า "โรเตอร์แบบกรงกระรอก (Squirrel Cage Rotor)"

2.โรเตอร์แบบเวานด์หรือแบบสลิปริง (Wound Rotor or Slip Ring Rotor)

เป็นโรเตอร์ที่ต้องพันขดลวดสนามแม่เหล็กในสล็อตภายนอกรอบ ๆ แกนโรเตอร์ ให้เป็นขดลวดไฟ 3 เฟสที่มีขั้วเช่น เดียวกับสเตเตอร์ แล้วต่อวงจรภายในให้เป็นวงจรสตาร์หรือวาย หรือวงจรเดลต้าปลายเปิดที่เหลือ 3 ปลายนำมาต่อเข้ากับสลิป

2.2 ลักษณะการทำงานของมอเตอร์เหนี่ยวนำ 3 เฟส

เมื่อจ่ายกระแสไฟสลับ 3 เฟสให้กับขดลวดสเตเตอร์ จะทำให้เกิดสนามแม่เหล็กหมุนซึ่งมีความเร็วรอบเท่ากับความเร็วซิงโครนัสสนามแม่เหล็กหมุนนี้จะเคลื่อนที่ตัดผ่านแท่งตัวนำที่ฝังอยู่ในโรเตอร์ เป็นผลทำให้เกิดแรงดันไฟฟ้าเหนี่ยวนำขึ้นที่โรเตอร์(ลักษณะคล้ายการทำงานของหม้อแปลง) และเนื่องจากตัวนำที่โรเตอร์ถูกลัดวงจรไว้ ดังนั้นจึงทำให้เกิดกระแสไหลในตัวนำโรเตอร์ ส่งผลให้เกิดแรงบิดและทำให้โรเตอร์หมุนได้ในทิศทางเดียวกับสนามแม่เหล็กหมุน แต่จะหมุนด้วยความเร็วที่ช้ากว่าความเร็วซิงโครนัสเสมอ ความเร็วรอบคงที่ของสนามแม่เหล็กหมุนสามารถคำนวณได้ตามสมการ (2.1) และ (2.2) เหนี่ยวนำโรเตอร์หมุนด้วยความเร็วรอบโรเตอร์ที่แปรผันไปตามโหลดที่มอเตอร์หมุนขับ

เมื่อ n_s คือ ความเร็วซิงโครนัสมอเตอร์ (รอบต่อนาที, rpm)

f คือความถี่ไฟฟ้าของระบบไฟ(Hz)

P คือจำนวนขั้วแม่เหล็กของสเตเตอร์

P_{ar} คือจำนวนคู่ขั้วแม่เหล็กของสเตเตอร์

ดังนั้นจะได้สมการความเร็วรอบ

$$n_s = 120 \times f / P(rpm) \tag{2.1}$$

$$n_s = 120 \times f / P_{ar}(rpm) \tag{2.2}$$

ตัวอย่างที่ 1 มอเตอร์เหนี่ยวนำระบบไฟ 3 เฟสประกอบด้วยขั้วแม่เหล็ก 4 ขั้วเมื่อต่อเข้ากับระบบไฟกระแสสลับความถี่ 50 Hz จะทำให้เกิดสนามแม่เหล็กหมุนรอบสเตอร์เตอร์ด้วยความเร็วกี่รอบ

$$n_S = 120 \times f / P(rpm)$$

เมื่อ $f = 50Hz$

$P = 4$

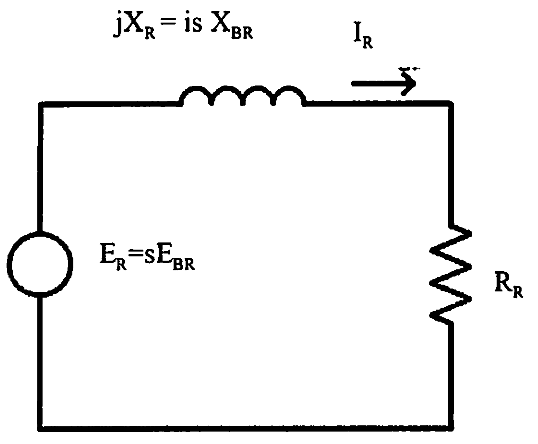
แทนค่า

$$n_S = 120 \times 50 / 4 = 1500(rpm)$$

2.3 วงจรสมมูลของมอเตอร์ [14], [15]

2.3.1 วงจรสมมูลของโรเตอร์ (Equivalent Circuit of Rotor)

เนื่องจากหลักการทำงานของมอเตอร์เหนี่ยวนำ 3 เฟส คล้ายกับการทำงานของหม้อแปลงไฟฟ้าที่มีการลัดวงจรทางด้านขดลวดทุติยภูมิ หรือขดลวดที่โรเตอร์ดังนั้นวงจรสมมูลจึงคล้ายกับหม้อแปลงไฟฟ้าด้วย ซึ่งวงจรสมมูลของโรเตอร์แสดงได้ดังรูปที่ 2.2



ภาพที่ 2.2 วงจรสมมูลของโรเตอร์

โดยที่ R_r =ความต้านทานของขดลวดโรเตอร์

X_r = รีแอคแตนซ์รั่วไหลของโรเตอร์

X_{br} =รีแอคแตนซ์ของโรเตอร์ขณะไม่หมุน

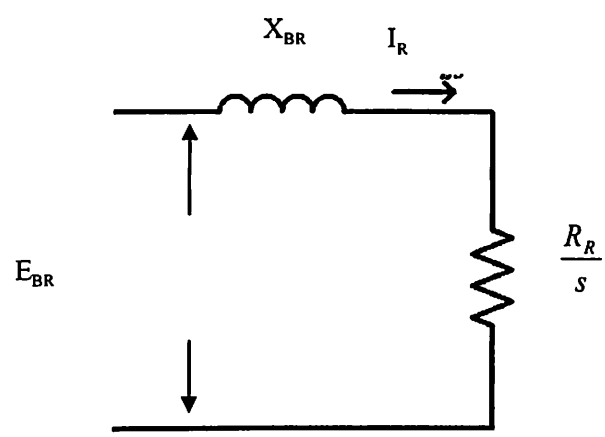
โดยที่

$$X_r = \omega_r L_r = 2\pi f_r L_r = 2\pi s f L_r$$

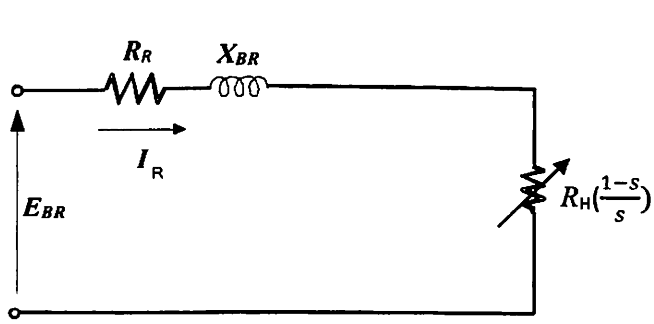
หรือ
$$X_r = s(2\pi f L_r) = sX_{br} \tag{2.3}$$

$$I_r = \frac{E_r}{R_r + jX_r} = \frac{sE_{br}}{R_r + jX_r} = \frac{sE_{br}}{\frac{R_r}{s} + \frac{jX_r}{s}} = \frac{E_{br}}{\frac{R_r}{s} + jX_{br}} \tag{2.4}$$

จากสมการ (2.4) สามารถเขียนแทนด้วยวงจรสมมูลดังรูปที่ 2.3



ภาพที่ 2.3 วงจรสมมูลโรเตอร์ตามสมการ (2.4)



ภาพที่ 2.4 วงจรสมมูลโรเตอร์เมื่อกระจายเทอม $\frac{R_r}{s}$

จากรูป 2.3สามารถกระจายให้อยู่เทอม $$\frac{R_r}{s} = R_r + R_r\frac{(1-s)}{s} \tag{2.5}$$

ดังนั้นจากสมการที่ (2.5) สามมารถนำมาเขียนแทนด้วยวงจรสมมูลได้ใหม่ดังรูปที่ (2.4) และถ้านำค่า I_r^2 คูณสมการที่ (2.5) ตลอดจะทำให้ได้ค่ากำลังสูญเสียในส่วนต่างๆดังสมการ (2.6)

$$I_r^2\frac{R_r}{s} = I_r^2R_r + I_r^2R_r\frac{(1-s)}{s} \tag{2.6}$$

กำหนดให้ $P_{ir} = 3I_r^2\frac{R_r}{s}$ =กำลังงานป้อนเข้าของวงจรโรเตอร์

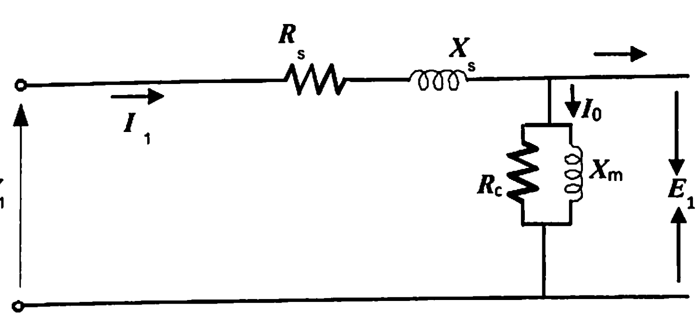
$P_{cur} = 3I_r^2R_r$ =กำลังสูญเสียในตัวนำโรเตอร์

$P_{conv} = 3I_r^2R_r\frac{(1-s)}{s} = P_{ir}(1-s)$ =กำลังไฟฟ้าที่เปลี่ยนเป็นกำลังงานกล

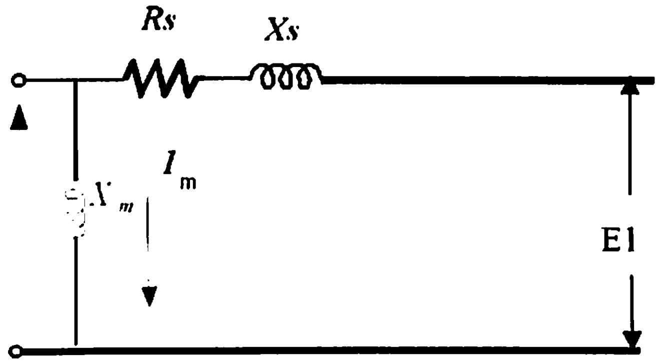
ดังนั้น $$P_{ir} = P_{cur} + P_{conv} \tag{2.7}$$

2.3.2 วงจรสมมูลของสเตเตอร์ (Equivalent Circuit of Stator)

วงจรสมมูลของสเตเตอร์จะมีลักษณะเหมือนกับวงจรสมมูลทางด้านปฐมภูมิของหม้อแปลงไฟฟ้าซึ่งวงจรสมมูลของสเตเตอร์ 1 เฟสแบบสมบูรณ์แสดงไว้ดังรูป 2.5 และเนื่องจากในมอเตอร์เหนี่ยวนำ 3 เฟสค่าพารามิเตอร์ $X_m \gg R_c$ ดังนั้นอาจเขียนวงจรสมมูลโดยประมาณได้โดยละทิ้งค่า R_c ดังแสดงไว้ในภาพที่2.6



ภาพที่ 2.5 วงจรสมมูลต่อเฟสของสเตเตอร์



ภาพที่ 2.6 วงจรสมมูลโดยประมาณของสเตเตอร์

โดยที่ R_S = ความต้านทานของขดลวดสเตเตอร์

X_S = ค่ารีแอคแตนซ์รั่วไหลของขดสเตเตอร์

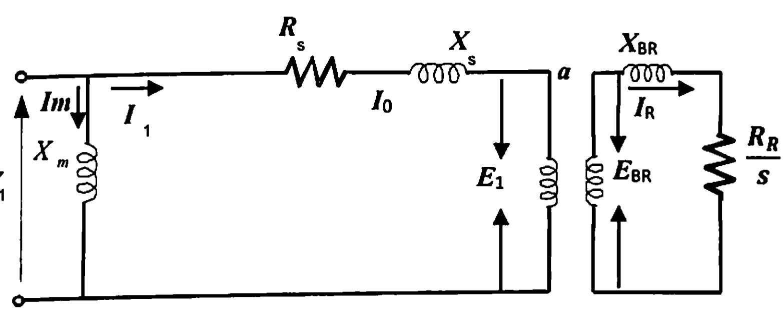
R_c = ความต้านทานของแกนเหล็ก

X_m = ค่ารีแอคแตนซ์ที่ทำให้เกิดสนามแม่เหล็ก

I_c = กระแสที่ทำให้เกิดการสูญเสียในแกนเหล็ก

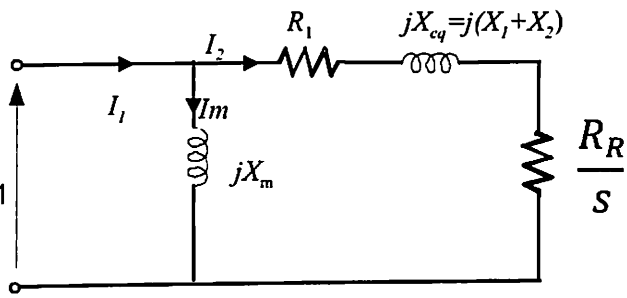
I_m = กระแสที่ทำให้เกิดสนามแม่เหล็ก

จากวงจรสมมูลของโรเตอร์และสเตเตอร์สามารถนำมาเขียนรวมกันซึ่งจะได้วงจรสมมูลของมอเตอร์เหนี่ยวนำ ดังภาพที่ 2.7



ภาพที่ 2.7 วงจรสมมูลต่อเฟสโดยประมาณของมอเตอร์เหนี่ยวนำ

จากหลักการเดียวกับหม้อแปลงไฟฟ้า เราสามารถทำการย้ายค่าพารามิเตอร์ด้านโรเตอร์มายังด้านสเตเตอร์โดยคิดแบบประมาณได้ดังภาพที่ 2.8



ภาพที่ 2.8 วงจรสมมูลต่อเฟสโดยประมาณด้านสเตเตอร์ของมอเตอร์เหนี่ยวนำ

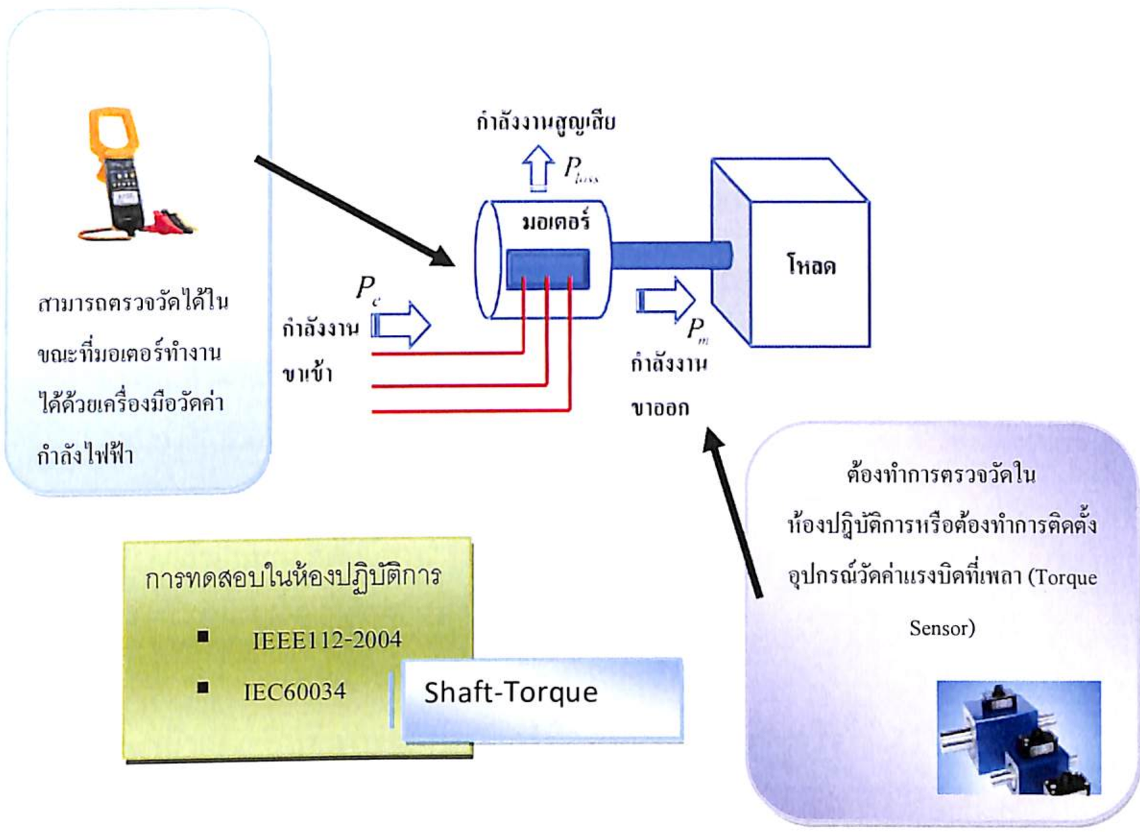
2.4 วิธีการตรวจวัดและประเมินประสิทธิภาพของมอเตอร์เหนี่ยวนำ 3 เฟส

วิธีการวัดแรงบิดที่เพลา (Shaft Power Output) วิธีการตามแผ่นป้าย (Name Plate) วิธีการค่าไถล (Slip Method) วิธีการค่ากระแส (Current Method) วิธีการวงจรสมมูล (Equivalent Circuit Method) วิธีการแยกความสูญเสียวิธีการแรงบิดที่ช่องอากาศ (Air Gap Torque) [3-9]

2.4.1 การตรวจวัดประสิทธิภาพมอเตอร์ในห้องปฏิบัติการ

- วิธีการวัดแรงบิดที่เพลา (Shaft Torque)

การหาค่าประสิทธิภาพด้วยวิธีการวัดแรงบิดที่เพลานี้เป็นวิธีตาม IEEE-112-2004, IEC 600034 ที่มีความถูกต้องและแม่นยำที่สุด [1-2] เพราะได้ค่ากำลังงานที่เพลาจากการวัดโดยตรงและการหาประสิทธิภาพวิธีนี้จำเป็นต้องวัดความเร็วรอบมาด้วย วิธีนี้จะต้องทำการทดสอบในห้องปฏิบัติการเนื่องจากต้องใช้เครื่องทดสอบที่สามารถปรับค่าและวัดแรงบิด รวมทั้งความเร็วรอบของมอเตอร์ได้ดังสมการ (2.8)



ภาพที่ 2.9 การวัดความวัดแรงบิดที่เพลา [11]

$$P_m = T \times \omega \tag{2.8}$$

$$\omega = \frac{2 \times \pi \times n_s}{60} \tag{2.9}$$

โดยที่ ω คือ ความเร็วรอบเชิงมุม (rad. / sec.)

T คือ แรงบิดที่เพลา (N-m)

$$T = \frac{9.55 P_e}{n_s} \tag{2.10}$$

จากนั้นนำค่าที่ได้ประเมินค่าประสิทธิภาพของมอเตอร์ตามสมการที่ (2.11) คือ

$$\eta = \frac{P_m}{P_e} \times 100\ \% \qquad (2.11)$$

โดยที่ P_e คือ กำลังงานไฟฟ้าจริงที่จ่ายเข้ามอเตอร์(W)

P_m คือ กำลังงานกลออกทีเพลาของมอเตอร์ (W)

ตัวอย่างที่ 2 ใช้ข้อมูลของมอเตอร์ขนาด 1.5 kW ตัวเก่าใช้ข้อมูลจากตาราง 4.2

แรงบิดที่วัดได้ 0.40 N.m

แทนค่าในสมการ (2.8)

$$P_m = 0.40 \times 0.104 \times 1500 = 62.4W$$

เมื่อได้ค่า P_m แล้วแทนค่าในสมการ(2.11)

$$\eta = \frac{62.4}{160} \times 100 = 39.1\%$$

2.5 การประเมินประสิทธิภาพของมอเตอร์ที่สภาวะการทำงานจริง

-วิธีการใช้ค่าตามแผ่นป้าย (Name Plate)

วิธีการประเมินประสิทธิภาพด้วยวิธีข้อมูลจากแผ่นป้ายนี้เป็นวิธีที่งายที่สุดสะดวกที่สุดจะใช้ค่าที่ทางผู้ผลิตได้กำหนดมาในแผ่นป้ายเพื่อหาประสิทธิภาพของมอเตอร์ได้ [5] แต่วิธีนี้จะมีความคลาดเคลื่อนสูงในกรณีที่มอเตอร์ไม่ได้ทำงานตามพิกัด มอเตอร์ที่ใช้งานมาเป็นเวลานาน และมอเตอร์ที่ถูกพันขดลวดใหม่

ภาพที่ 2.10 การใช้ค่าตามแผ่นป้าย [11]

ตัวอย่างที่ 3 วิธีการหาค่าประสิทธิภาพของมอเตอร์จากแผ่นป้ายภาพที่ 2.10

1. มอเตอร์แบบกรงกระรอก
2. ระบบไฟฟ้า 3 เฟส
3. กำลังไฟฟ้า 1.5 kW
4. แรงดันเมน 220/380
5. ความถี่ไฟฟ้า 50 Hz
6. วงจรการต่อขดลวดสเตเตอร์ Δ/Y
7. กระแสมอเตอร์ 5.9 / 3.4 A.
8. เพาเวอร์แฟคเตอร์ 0.82
9. ความเร็วรอบ 1430 rpm.

วิธีทำ ตามสมการ (2.11) $\eta = \dfrac{P_m}{P_e} \times 100\ \%$

$$P_m = 1.5kW$$

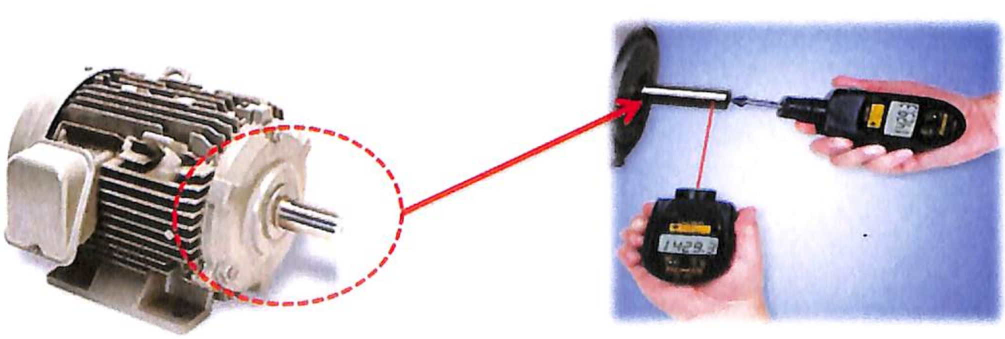
$$P_e = \sqrt{3xV_1}xI_1x\cos\varphi(W)$$

$$P_e = \sqrt{3}x380x3.4x0.82 = 1834W$$

$$\eta = 1500x100/1834 = 81.79\%$$

-วิธีการค่าไถล (Slip Method)

วิธีการประเมินประสิทธิภาพจากค่าไถลของมอเตอร์ จะเป็นการเปรียบเทียบสัดส่วนกำลังงานขาออกของมอเตอร์จากค่าไถลที่สามารถคำนวณได้จากความเร็วรอบที่ตรวจวัด เทียบกับค่าไถลในขณะที่มอเตอร์ทำงานที่พิกัด [3-4] ซึ่งวิธีนี้จะสามารถประเมินประสิทธิภาพของมอเตอร์จากการวัดความเร็วรอบได้โดยไม่ต้องหยุดเดินเครื่องมอเตอร์ แต่จะมีความคลาดเคลื่อนที่ค่อนข้างสูง



ภาพที่ 2.11 การวัดค่าไถล [11]

$$P_m = \frac{S}{S_{rated}} \times P_m^{rated} \quad (2.12)$$

$$\text{เมื่อ } S = \frac{n_s - n_r}{n_s - n_{rated}} \quad (2.13)$$

และ

$$S_{rated} = \frac{n_s - n_r^{rated}}{n_s} \quad (2.14)$$

จากนั้นนำค่าที่ได้ประเมินค่าประสิทธิภาพของมอเตอร์ตามสมการที่(2.11)

โดยที่ n_s คือ ความเร็วซิงโครนัสมอเตอร์ (รอบต่อนาที, rpm)

n_r คือ ความเร็วรอบของมอเตอร์ทำงาน (รอบต่อนาที, rpm)

n_r^{rated} คือ ความเร็วรอบพิกัดของมอเตอร์ (รอบต่อนาที, rpm)

S คือ ค่าไถลที่วัดได้

S_{rated} คือ ค่าไถลที่พิกัดของมอเตอร์

η คือ ค่าประสิทธิภาพของมอเตอร์ (%)

ตัวอย่างที่ 4 มอเตอร์ 1.5 kW มีค่าความเร็วซิงโครนัส 1500 rpm, ความเร็วรอบที่ระบุไว้บนเนมเพลตเท่ากับ 1400 rpm, ความเร็วที่วัดได้จริงเท่ากับ 1496 rpm อินพุต 0.16 kW

วิธีทำ ตามสมการ (2.11) $\eta = \frac{P_m}{P_e} \times 100\ \%$

$$\text{เมื่อ } S = \frac{n_s - n_r}{n_s - n_{rated}}$$

แทนค่าสมการ (2.13)

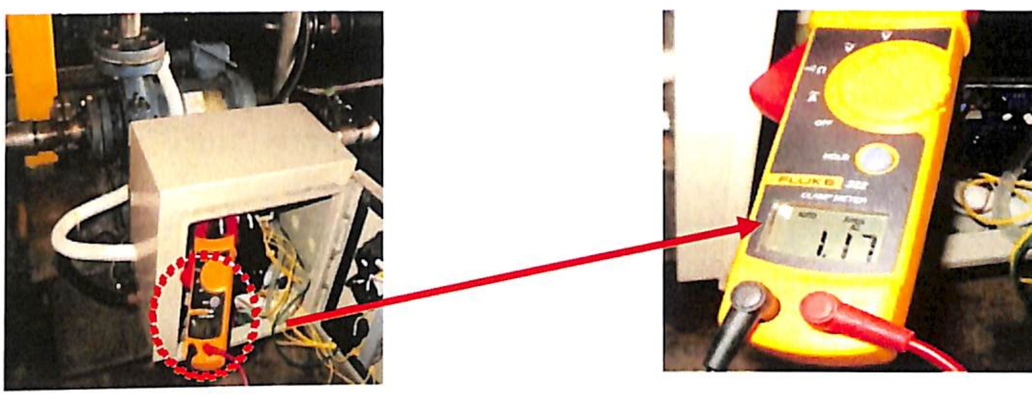
$$S = \frac{(1500 - 1496)}{(1500 - 1400)} = 0.04$$

แทนค่าในสมการ (2.11)

$$\eta = \frac{0.04 \times 1500}{160} \times 100 = 37.5\,\%$$

- วิธีการหาค่ากระแส (Current Method)

วิธีการประเมินประสิทธิภาพจากค่ากระแสของมอเตอร์ จะเป็นวิธีการประเมินกำลังงานขาออกของมอเตอร์โดยใช้หลักว่ากำลังงานขาออกของมอเตอร์จะแปรผันตรงกับค่าของกระแสที่มอเตอร์ใช้ [3-4] ซึ่งวิธีการนี้จะมีค่าคาดเคลื่อนสูงเช่นกันดังสมการที่ (2.15)



ภาพที่ 2.12 การวัดค่ากระแสของมอเตอร์ [11]

$$P_m = \frac{I_L}{I_{rated}} \times P_m^{rated} \tag{2.15}$$

จากนั้นนำค่าที่ได้ประเมินค่าประสิทธิภาพของมอเตอร์ตามสมการที่ (2.11)

โดยที่ I_{rated} คือ กระแสพิกัดมอเตอร์ (A)

I_L คือ กระแสที่วัดได้ (A)

P_m^{rated} คือ พิกัดกำลังงานกลของมอเตอร์ (W)

จากสมการนี้จะมีค่าคาดเคลื่อนสูงมากเนื่องจากที่สมการคำนวณเป็นสมการเส้นตรงแต่ในความเป็นจริงกระแสกับกำลังเอาต์พุตไม่เป็นสัดส่วนโดยตรงต่อกันจึงมีการปรับปรุงสมการให้ใกล้เคียงกับความเป็นจริงมากที่สุดโดยนำกระแส No-load เข้ามาพิจารณาดังสมการที่ (2.16)

$$P_m = \frac{I - I_{nl}}{I_{rated} - I_{nl}} \times P_m^{rated} \tag{2.16}$$

โดยที่ I_{nl} คือ กระแสขณะไม่มีโหลด(A)

P_m^{rated} คือ พิกัดกำลังงานกลของมอเตอร์ (W)

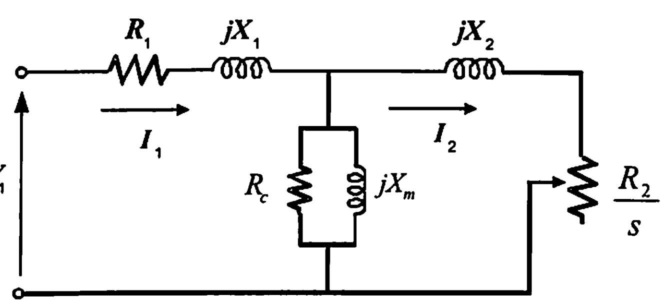
ตัวอย่างที่ 5 การค่าประสิทธิภาพของมอเตอร์เหนี่ยวนำด้วยวิธีกระแสใช้มอเตอร์ 1.5 kW ตัวเก่า มีค่าความเร็วซิงโครนัส 1500 rpm, ความเร็วรอบที่ระบุไว้บนเนมเพลตเท่ากับ 1400 rpm, ความเร็วที่วัดได้จริงเท่ากับ 1496 rpm อินพุต 0.16 kW กระแสขับโหลด 1.8 A กระแสพิกัด 3.7 A

แทนค่าในสมการ (2.15) $P_m = \frac{1.8A}{3.7A} \times 1500W = 729.73W$

แทนค่าในสมการ(2.11) $\eta = \frac{729.73}{160} \times 100 = 456.08\%$

-วิธีการวงจรสมมูล (Equivalent Circuit Method)

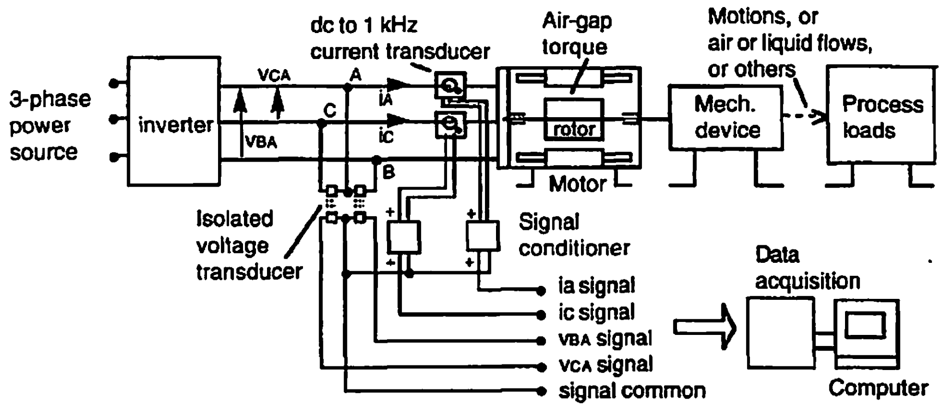
วิธีการวงจรสมมูลสามารถหาค่าจากการทดสอบ คือ การทดสอบแบบไม่มีโหลด การทดสอบแบบยึดโรเตอร์ หรืออาจใช้การหาค่าตัวแปรในวงจรสมมูลจากการวิเคราะห์ทางปัญญาประดิษฐ์ได้ [5-8] ซึ่งในการทดสอบที่หน้างานนั้นจะไม่มีความสะดวก ส่วนวิธีการทางปัญญาประดิษฐ์จะใช้การคำนวณที่ซับซ้อนและต้องใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการคำนวณ



ภาพที่ 2.13 การหาค่าวงจรสมมูล

-วิธีการแรงบิดที่ช่องอากาศ (Air Gap Torque)

วิธีการนี้อาศัยการตรวจวัดค่าแรงดันและกระแสเป็นช่วงเวลา รวมถึงจำเป็นต้องทราบค่าความต้านทานของขดลวดสเตเตอร์ แล้วจึงนำมาคำนวณหาค่าแรงบิดที่ช่องว่างอากาศ [9] ซึ่งจะต้องใช้เครื่องบันทึกค่าทางไฟฟ้าแบบต่อเนื่องและต้องทำการวัดค่าความต้านทานของขดลวดสเตเตอร์ซึ่งทำให้ต้องทำการหยุดเดินเครื่องมอเตอร์



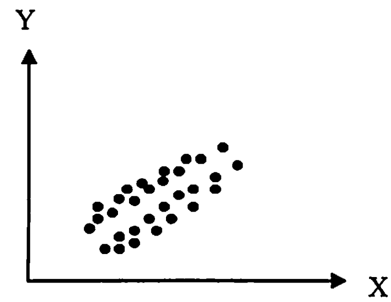
ภาพที่ 2.14 การหาค่าแรงบิดที่ช่องอากาศของมอเตอร์ [9]

สรุปจากวิธีการที่กล่าวมาแล้วนั้น ในโครงการวิจัยนี้จึงได้เสนอการศึกษาวิธีการประเมินประสิทธิภาพของมอเตอร์ที่สภาวะทำงานโดยไม่จำเป็นต้องหยุดเดินเครื่องมอเตอร์จากความสัมพันธ์ของกำลังงานขาออกกับกระแสที่มอเตอร์ใช้และความสัมพันธ์ของกำลังงานขาออกกับค่าไถลของมอเตอร์

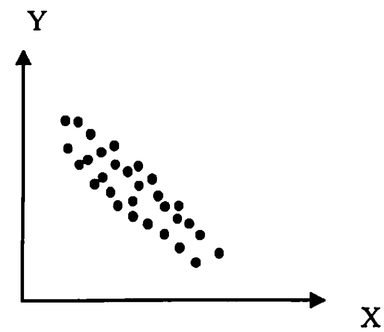
2.6 การวิเคราะห์ถดถอยทางสถิติ

2.6.1 การวิเคราะห์ถดถอย1 ตัวแปร (Simple Linear Regression) [13]

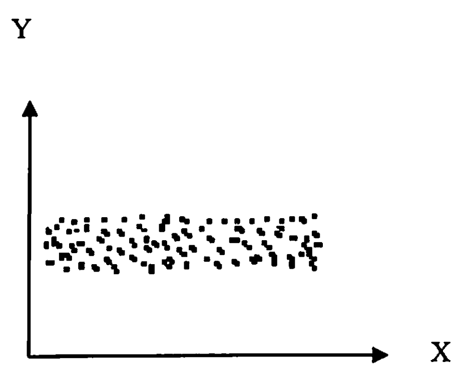
การวิเคราะห์การถดถอย Regression Analysis เป็นการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างสองตัวแปร ตัวแปรหนึ่งเรียกว่าตัวแปรต้นหรือตัวแปรอิสระIndependent Variable แทนด้วย X อีกตัวแปรหนึ่งเรียกว่าตัวแปรตาม Dependent Variable แทนด้วย Y เป็นการดูความสัมพันธ์ว่าถ้า ตัวแปรอิสระเปลี่ยนไปแล้วตัวแปรตามเปลี่ยนไปด้วยหรือไม่ ซึ่งสองตัวแปรนั้นจะต้องเป็นตัวแปรเชิงปริมาณ การวิเคราะห์การถดถอยสามารถเขียนรูปแบบความสัมพันธ์ของสองตัวแปรได้ในรูปของสมการ $Y = \alpha + \beta X$ ซึ่งจะแทนค่า α และ β ด้วยค่า a และ b โดยที่ a คือค่าคงที่เป็นค่าที่เส้นกราฟถดถอยตัดกับแกน Y ส่วน b เป็นความชัน (Slope) ของเส้นกราฟ ซึ่งแสดงถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงของ Y เมื่อ X เปลี่ยนแปลง เรียกส่วนนี้ว่า สัมประสิทธิ์การถดถอย (Regression Coefficient) หรือสัมประสิทธิ์การพยากรณ์เขียนกราฟความสัมพันธ์สามารถเขียนได้



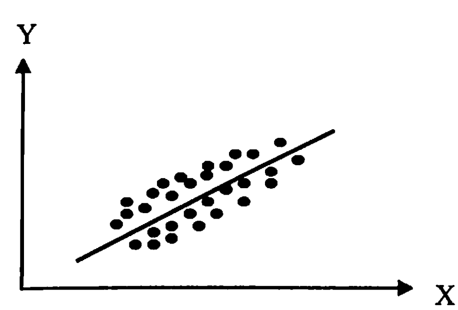
ภาพที่ 2.15 ตัวแปร X และตัวแปร Y มีความสัมพันธ์เชิงเส้นตรงในทิศทางเดียว



ภาพที่ 2.16 ตัวแปร X และตัวแปรY มีความสัมพันธ์เชิงเส้นตรงในทิศทางตรงกันข้าม



ภาพที่ 2.17 ตัวแปร XและตัวแปรYมีความสัมพันธ์เชิงพาราโบลาเส้นตรงในทิศทางเดียวกัน



ภาพที่ 2.18 ลักษณะเส้นถดถอย

จากภาพ 2.15- 2.18 เมื่อลากเส้นตรงให้ผ่านจุดมากที่สุดจะได้เส้นตรงเรียกว่า เส้นถดถอย เรียกว่า เส้นถดถอยดังภาพ 2.18 ซึ่งสามารถแสดงความสัมพันธ์เส้นถดถอยในรูปแบบสมการเชิงเส้นได้ดังนี้

$$Y = \alpha + \beta X \tag{2.17}$$

โดยที่ Y คือค่าของตัวแปรตาม

X คือค่าของตัวแปรอิสระ

α คือจุดตัดแกน Y

β คือความชันของเส้นตรง

ตัวอย่าง 6 การวิเคราะห์ถดถอย1 ตัวแปรใช้ข้อมูลมอเตอร์ตามตาราง 4.3 มอเตอร์เก่าเพื่อใช้ในการวิเคราะห์

ตารางที่ 2.1ตารางการหาค่าตัวแปรถดถอยแบบ 1ตัวแปร

Load	$X=(I/I_{rated})$	$Y=(P/P_{rated})$	X^2	Y^2	XY
0.00	0.486	0.042	0.237	0.002	0.020
10	0.495	0.135	0.245	0.018	0.067
20	0.505	0.207	0.255	0.043	0.105
30	0.538	0.340	0.289	0.116	0.183
40	0.573	0.420	0.328	0.176	0.241
50	0.603	0.500	0.363	0.250	0.301
60	0.665	0.619	0.442	0.383	0.411
70	0.708	0.696	0.501	0.484	0.493
80	0.770	0.783	0.593	0.614	0.603
90	0.832	0.877	0.693	0.770	0.730
100	0.924	0.988	0.854	0.976	0.913
รวม	7.100	5.608	4.802	3.832	4.068

$$\sum X = 7.100, \sum Y = 5.608$$

$$\sum X^2 = 4.802,\ \sum XY = 4.068$$

หาค่า α และ β

$$\beta = \frac{\sum xy}{\sum x^2} \tag{2.18}$$

$$\beta = \frac{N\sum XY - \sum X.\sum Y}{N\sum X^2 - (\sum X)^2}$$

$$\beta = \frac{11\sum 4.068 - \sum 7.100.\sum 5.608}{11\sum 4.802 - (\sum 7.100)^2} = 2.044$$

$$\alpha = \overline{Y} - \beta\overline{X}$$

$$\alpha = \frac{5.608}{11} - (2.044).\frac{7.100}{11} = -0.809$$

ดังนั้น สมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร X กับตัวแปร Y ซึ่งเป็นสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{P_m}{P_m^{rated}} = \frac{I_L}{I_{rated}}$

$$Y = -0.809 + 2.044X$$

2.6.2 การวิเคราะห์ถดถอยแบบหลายตัวแปร (Multiple Multivariable Regressions) [13]

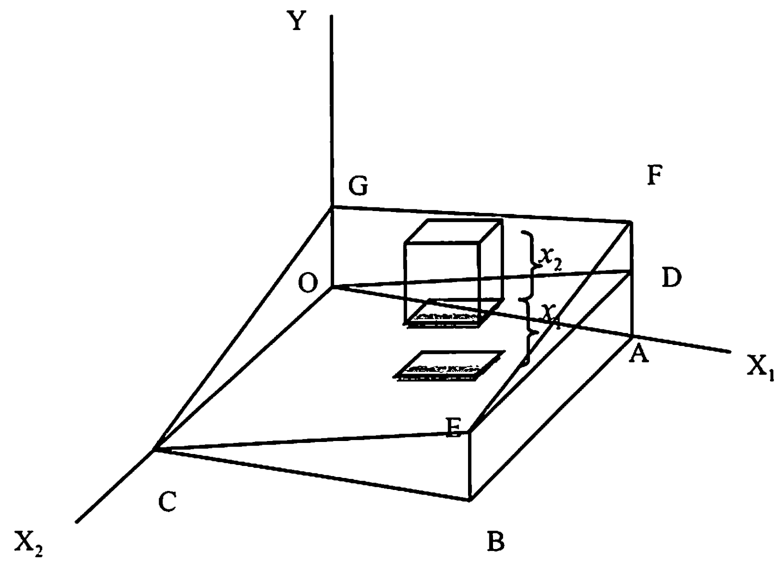
ในกรณีที่ตัวแปลอิสระ 2 ตัว จะเห็นได้ว่าหากเราเขียนกราฟ แต่ละจุดบนกราฟจะถูกกำหนดโดยค่า 3ค่า คือ Y , X_1 และ X_2 ดังรูปที่ 2.19 ซึ่งแสดงให้เห็นถึงผลของ X_1 และ X_2 ร่วมกันต่อตัวแปลตาม Y แต่ละจุดบน plane GFEC จะประกอบด้วยส่วนต่างๆ ดังนี้

1. มีจุดฐานอยู่บน plane OABC
2.ผลจาก X_1 ทำให้เกิดระยะระหว่างฐานถึง plane ODEC
3.ผลจาก X_2 ทำให้เกิดระยะระหว่างฐาน plane ODEC ถึง plane GFEC

ในกรณีนี้ถ้าเราพิจารณา Regression plane จุดใดจุดหนึ่ง เช่น ในรูป 2.19จะเห็นได้ว่าค่าของ Y

ณ Planeจุดนั้นอาจเขียนได้ดังนี้

$$\hat{Y} = a + b_1X_1 + b_2X_2 \qquad (2.19)$$



ภาพที่ 2.19 แสดงplane OABC [13]

เมื่อ $\hat{Y}$ เป็นค่าเฉลี่ยของ Y ที่กระจายอยู่ ณ จุดที่กำหนดโดย X_1 และ X_2 โดยสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ $\hat{Y} = E(\frac{Y}{X_1X_2})$ b_1 แสดงว่าเมื่อ X_1 เปลี่ยนแปลงไป 1 หน่วย ค่า Y จะเปลี่ยนแปลงไปเท่ากับ b_1 โดยที่ X_2 คงที่ ดังนั้น

$$\hat{Y} = a + b_1X_1 + b_1 + b_2X_2$$

b_1 จึงถูกเรียกว่า Partial regression coefficientของ Y ต่อ X_2 คงที่ ตามธรรมดาเขียนเป็น $b_y1.2$ ซึ่งคำนวณได้มาโดยที่ส่วนเบี่ยงเบนรอบ planeมีค่าน้อยที่สุด

ณ จุดที่กำหนดโดย X_1, X_2 แต่ละค่าของ Y จะกระจายอยู่รอบๆ regression plane ตามลักษณะการกระจายปกติ โดยมีเฉลี่ยส่วนเบี่ยงเบนเท่ากับ 0 และวาเรียนซ์ σ^2 ในบางครั้งเขียนเป็น $\sigma^2 y.12$ ดังนั้นแบบหุ่นจึงเป็นดังนี้

$$Y = a + \beta X_1 + \beta X_2 + \varepsilon, \varepsilon \sim N,(0,\sigma)$$

จากตัวอย่าง n ค่าของ (Y , X_1, X_2) เมื่อ $\alpha = \overline{Y} - b\overline{X}_1 - b\overline{X}_2$

คำนวณสมการทำนายได้ดังสมการ (2.19)

$$\hat{Y} = a + b_1X_1 + b_2X_2$$

ค่า a, b_1 และ b_2 คำนวณมาโดยที่ $\sum(Y - \overline{Y})^2$ ซึ่งเป็นผลรวมกำลังสองของความแตกต่างระหว่างค่าสังเกตได้กับคำทำนายต่ำสุด โดยทฤษฎีค่า a, b_1 และ b_2 จะเป็นค่าไม่มีความเอนเอียงและมีความคลาดเคลื่อนมาตรฐานน้อยที่สุด เมื่อเปรียบเทียบกับ Unbiased estimate อื่นๆ ที่คำนวณจากแบบหุ่นเส้นตรง

$$a = \overline{Y} - b_1\overline{X}_1 - b_2\overline{X}_2 \tag{2.20}$$

เมื่อแทนค่า a ในสมการ (2.20) ข้างบนจะได้

$$\hat{Y} = \overline{Y} + b_1(X_1 + \overline{X}_1) + b_2(X_2 - \overline{X}_2)$$

$$\sum e_i^2{}_i = \sum\left\{Y_i - \overline{Y} - b_1(X_{1i} - \overline{X}_1) - b_2(X_{2i} - \overline{X}_2)\right\}^2 \tag{2.21}$$

สามารถคำนวณ b_1 และ b_2 จากสมการปกติโดย

$$\frac{\partial(\sum e_i^2)}{\partial b_j} = 0 \tag{2.22}$$

สมการปกติได้ดังนี้

$$b_1\sum(X_{1i} + \overline{X}_1)^2 + b_2\sum(X_{1i} - \overline{X}_1)(X_{2i} - \overline{X}_2) = \sum(X_{1i} - \overline{X}_1)(Y_i - \overline{Y}) \tag{2.23}$$

$$b_1\sum(X_{1i} + \overline{X}_1)(X_{2i} - \overline{X}_2) + b_2\sum(X_{2i} - \overline{X}_2)^2 = \sum(X_{2i} - \overline{X}_2)(Y_i - \overline{Y}) \tag{2.24}$$

ซึ่งคำนวณ b_1 และ b_2 ได้โดยวิธี Simultaneous equation

$$b_1 = \frac{\sum(X_{2i} - \overline{X}_2)^2\sum(X_{1i} - \overline{X}_1)(Y_i - \overline{Y}) - \sum(X_{1i} - \overline{X}_1)(X_{2i} - \overline{X}_2)\sum(X_{2i} - \overline{X}_2)(Y_i - \overline{Y})}{\sum(X_{1i} - \overline{X})^2\sum(X_{2i} - \overline{X}_2)^2 - (\sum(X_{1i} - \overline{X}_1)(X_{2i} - \overline{X}_2))^2}$$

$$b_2 = \frac{\sum(X_{1i} - \overline{X}_1)^2\sum(X_{2i} - \overline{X}_2)(Y_i - \overline{Y}) - \sum(X_{1i} - \overline{X}_1)(X_{2i} - \overline{X}_2)\sum(X_{1i} - \overline{X}_1)(Y_i - \overline{Y})}{\sum(X_{1i} - \overline{X})^2\sum(X_{2i} - \overline{X}_2)^2 - (\sum(X_{1i} - \overline{X}_1)(X_{2i} - \overline{X}_2))^2}$$

การวิเคราะห์ข้อมูลโดยวิธี Multiple Regressions

จากทฤษฎี Multiple Regression ถือว่าส่วนเบี่ยงเบนของ Y จาก Regression plane มี Estimate เท่ากับศูนย์และวาเรียนซ์ σ^2 Unbiased Estimateของ σ^2 ก็คือ s^2 ซึ่งเท่ากับ $\sum(Y-\hat{Y})^2/(n-k)$ เมื่อ n เท่ากับจำนวนค่าข้อมูลและ k คือจำนวน Parameter ที่ใช้ในการคำนวณโดยที่มี α , β_1 และ β_2 ในแบบหุ่น

ถ้าให้ $d=(Y-\hat{Y})$ หรือส่วนเบี่ยงเบนจากรีเกรชชัน $\hat{y}=(\hat{Y}-\overline{Y})$ และ $y=Y-\overline{Y}$

เมื่อ $\hat{y}=(\hat{Y}-\overline{Y})$

$$=(\hat{Y}-\overline{Y})+(Y-\hat{Y})$$

$$=\hat{y}+d$$

ดังนั้น

$$\sum y^2=\sum\hat{y}^2+\sum d^2 \tag{2.25}$$

$$\because \sum\hat{y}d=0$$

โดยพิสูจน์ได้จากสมการปกติ

$$b_1\sum x_1^2+b_2\sum x_1x_2=\sum x_1y$$

$$\sum x_1(y-b_1x_1-b_2x_2)=0$$

$$\sum x_1d=0$$

ในทำนองเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า

$$\sum x_2d=0$$

ดังนั้น $b_1\sum x_1d+b_2\sum x_2d=0$

$$\sum(b_1x_1+b_2x_2)d=0$$

$$\because \sum\hat{y}d=0$$

จากสมการ 2.21 จะเห็นได้ว่าผลรวมกำลังสองของส่วนเบี่ยงเบน y จากเฉลี่ยประกอบด้วยส่วนประกอบสองส่วนคือ (1) $\sum \hat{y}^2$ ซึ่งเรียกว่าผลบวกกำลังสองเนื่องจากรีเกรชชัน (Sum of Squares to Regression) (SSR) อันเป็นผลรวมกำลังสองของส่วนเบี่ยงเบน $\hat{y}$ จากเฉลี่ย (2) $\sum d^2$ ซึ่งเป็นผลรวมกำลังสองของส่วนเบี่ยงเบน Y จากค่าคำนวณตามสูตรคือ $\hat{y}$

จากสมการปกติจะเห็นได้ว่า

$$b_1^2 \Sigma x_1^2 + b_1 b_2 \Sigma x_1 x_2 = b_1 \Sigma x_1 y \tag{2.26}$$

$$b_1 b_2 \Sigma x_1 x_2 + b_{2\,1}^2 \Sigma x_2^2 = b_2 \Sigma x_2 y \tag{2.27}$$

เมื่อรวม (2.22) และ (2.23) จะได้

$$b_1^2 \Sigma x_1^2 + 2b_1 b_2 \Sigma x_1 x_2 + b_2^2 \Sigma x_2^2 = b_1 \Sigma x_1 y + b_2 \Sigma x_2 y$$

$$\Sigma(b_1 x_1 + b_2 x_2)^2 = b_1 \Sigma x_1 y + b_2 \Sigma x_2 y$$

$$\therefore \Sigma \hat{y}^2 = b_1 \Sigma x_1 y + b_2 \Sigma x_2 y \tag{2.28}$$

ดังนั้น SSR เท่ากับผลรวมของ Estimate ของรีเกรชชันคูณด้วยค่าทางขวามือของ (Right Hand Side, RHS) สมการปกติ

$$SSR = \Sigma(estimate \times RHS) \tag{2.29}$$

ตารางที่ 2.2 ผลการวิเคราะห์โดยวิธี Multiple regression จึงแสดงได้ดังในตาราง

Source of variation	df	ss	ms	F
Regression	2	$\Sigma\hat{y}^2$	$MS_1 = \Sigma\hat{y}^2/2$	MS_1/MS_2
Deviation	$n-3$	$\Sigma y^2 - \Sigma\hat{y}^2$	$MS_2 = (\Sigma y^2 - \Sigma\hat{y}^2)/(n-3)$	
Total	$n-1$	Σy^2		

การทดสอบสมมติฐาน

$(1) H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$

$$Ftest = MS_1 / MS_2$$

นั่นคือ $y \neq b_1x_1 + b_2x_2 + e$ แต่ $y = b_1x_1 + e$

ตารางที่ 2.3 การวิเคราะห์กระทำได้ดังแสดงไว้ในตาราง

Source of variation	df	ss	ms	F
Due to fitting X_1, X_2	2	$\Sigma\hat{y}^2$		MS_1/MS_2
Due to fitting X_1	1	$(\Sigma x_1 y)^2/\Sigma x_1^2$		
Due to X_2 after fitting X_1	1	$\Sigma\hat{y}^2 - (\Sigma x_1 y)^2/\Sigma x_1^2$	MS_1	MS_1/MS_2
Residual	$n-3$		MS_2	

ค่าของ b_1 ในแบบหุ่นที่รวมทั้ง X_1 และ X_2 จะไม่เท่ากับ b_1 ในแบบหุ่นที่มีเพียง X_1 เท่านั้น เรียกว่าค่าของ b ไม่ Unique และขึ้นอยู่กับแบบหุ่นการวิเคราะห์สำหรับกรณีที่มี k , X และต้องการทดสอบสมมติฐานว่า $\beta_k = 0$ ก็กระทำในทำนองเดียวกันคือ ประการแรกวิเคราะห์โดยมี X,k ตัวในแบบหุ่นและคำนวณ SSR เนื่องจาก k X และได้ R_k จากนั้นวิเคราะห์โดยมี X เพียง $k-1$ ตัว โดยละ X_k ไว้ซึ่งจะได้ $R_{(k-1)}$

$$F = (R_k - R_{(k-1)})/s^2$$

โดย $s^2 = (\sum y^2 - R_k)/(n-1-k)$

ตัวอย่างที่ 7 การวิเคราะห์ถดถอยหลายตัวแปรใช้ข้อมูลมอเตอร์ขนาด 1.5 kW เพื่อใช้ในการวิเคราะห์

ตารางที่ 2.4 ตารางการหาค่าตัวแปรเพื่อใช้ในการคำนวณหาค่าถดถอยแบบหลายตัวแปร

$Y=P/P_R$	$X_1=I/I_R$	$X_2=S/SR$	$(X_1)(X_2)$	$X1_2$	$X2_2$	Y_2	$(X_1)(Y)$	$(X_2)(Y)$
0.04	0.55	0.03	0.02	0.31	0.00	0.00	0.02	0.00
0.16	0.56	0.11	0.06	0.32	0.01	0.02	0.09	0.02
0.21	0.57	0.14	0.08	0.33	0.02	0.04	0.12	0.03
0.29	0.60	0.20	0.12	0.36	0.04	0.08	0.17	0.06
0.44	0.66	0.30	0.20	0.43	0.09	0.20	0.29	0.13
0.48	0.67	0.34	0.23	0.45	0.12	0.23	0.32	0.17
0.62	0.74	0.43	0.32	0.55	0.18	0.38	0.46	0.26
0.71	0.79	0.53	0.42	0.63	0.28	0.51	0.57	0.38
0.80	0.84	0.57	0.48	0.71	0.33	0.63	0.67	0.45
0.92	0.92	0.66	0.60	0.84	0.43	0.85	0.85	0.61
1.01	0.99	0.76	0.75	0.98	0.57	1.02	1.00	0.76
5.68	7.90	4.07	32.15	62.36	16.57	32.31	44.89	23.14

เมื่อได้ค่าจากตาราง2.4 นำไปแทนค่าในสมการ (2.23), (2.24) เพื่อหาค่า b_1, b_2 เมื่อได้ค่า b_1, b_2 แทนค่าสมการ (2.20) เพื่อหาค่า a เมื่อได้ทั้งค่า a,b1,b2 แทนค่าในสมการ (2.19) เพื่อค่ากำลังงานขาออกของมอเตอร์เพื่อใช้ในการหาค่าประสิทธิภาพขอมอเตอร์ในสมกา (2.11)